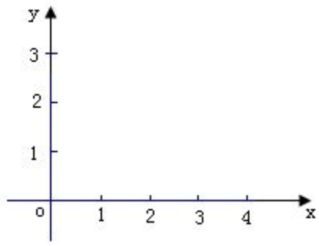
1．设函数 $f(x)=\begin{cases}1,1\le x\le 2\\ x-1,2<x\le 3\end{cases}$，$g(x)=f(x)-ax,x\in[1,3]$，




其中 $a\in R$，记函数 $g(x)$ 的最大值与最小值的差为 $h(a)$。

（I）求函数 $h(a)$ 的解析式；（II）画出函数 $y=h(x)$ 的图象并指出 $h(x)$ 的最小值。

2．已知函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$，

$a_{n+1}=f(a_n)$；数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\frac{1}{2},b_{n+1}\ge\frac{1}{2}(n+1)b_n$，$n\in N^*$. 求证:

（Ⅰ）$0<a_{n+1}<a_n<1$;（Ⅱ）$a_{n+1}<\frac{a_n{}^2}{2}$;（Ⅲ）若 $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则当 n≥2 时，$b_n>a_n\cdot n!$.

3．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 同时满足：

（1）$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cos 2x_2+4a\sin^2 x_2$（$x_1,x_2\in$R，$a$ 为常数）；

（2）$f(0)=f(\frac{\pi}{4})=1$；（3）当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$|f(x)|\leqslant 2$。

求：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的解析式；（Ⅱ）常数 $a$ 的取值范围.

4．设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点，

满足 $(\frac{x_1}{b},\frac{y_1}{a})\cdot(\frac{x_2}{b},\frac{y_2}{a})=0$，椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长为 2，0 为坐标原点.

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 AB 过椭圆的焦点 F（0，c），（c 为半焦距），求直线 AB 的斜率 k 的值；

（3）试问：△AOB 的面积是否为定值？如果是，请给予证明；如果不是，请说明理由.

5．已知数列 $\{a_n\}$ 中各项为：12、1122、111222、……、$\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n}\underbrace{22\cdots\cdots2}_{n}$ ……

个　　个

（1）证明这个数列中的每一项都是两个相邻整数的积.　（2）求这个数列前 n 项之和 $S_n$ .

6、设 $F_1$、$F_2$ 分别是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点.

（Ⅰ）若 P 是该椭圆上的一个动点，求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值和最小值；

（Ⅱ）是否存在过点 A（5，0）的直线 $l$ 与椭圆交于不同的两点 C、D，使得|F₂C|=|F₂D|？若存在，求直线 $l$ 的方程；若不存在，请说明理由.

7、已知动圆过定点P（1，0），且与定直线L:x=-1相切，点C在$l$上.
(1)求动圆圆心的轨迹M的方程；

(2)设过点P,且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与曲线M相交于A,B两点.

（i）问：△ABC能否为正三角形？若能，求点C的坐标；若不能，说明理由
（ii）当△ABC 为钝角三角形时，求这种点 C 的纵坐标的取值范围.

8、定义在 R 上的函数 y=f(x)，f(0)≠0，当 x>0 时，f(x)>1，且对任意的 a、b∈R，有 f(a+b)=f(a)f(b)，
（1）求证：f(0)=1；（2）求证：对任意的 x∈R，恒有 f(x)>0；
（3）证明：f(x)是 R 上的增函数；（4）若 f(x)·f(2x-$x^2$)>1，求 x 的取值范围。

9、已知二次函数$f(x)=x^2+2bx+c(b,c\in R)$满足$f(1)=0$，且关于$x$的方程$f(x)+x+b=0$的两实数根分别在区间（-3，-2），（0，1）内。 （1）求实数$b$的取值范围；
（2）若函数$F(x)=\log_b f(x)$在区间（-1-$c$，1-$c$）上具有单调性，求实数$C$的取值范围

10、已知函数$f(x)$在$(-1,1)$上有意义,$f(\frac{1}{2})=-1$,且任意的$x$、$y\in(-1,1)$都有

$f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$. （1）若数列$\{x_n\}$满足$x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}(n\in N^*)$,求$f(x_n)$.

（2）求$1+f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})+f(\frac{1}{n+2})$的值.

11. 在直角坐标平面中，△ABC 的两个顶点为 A（0，－1），B（0, 1）平面内两点 G、M 同时满足①$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，②$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$③$\overrightarrow{GM}\parallel\overrightarrow{AB}$

（1）求顶点 C 的轨迹 E 的方程

（2）设 P、Q、R、N 都在曲线 E 上，定点 F 的坐标为（$\sqrt{2}$，0），已知$\overrightarrow{PF}\parallel\overrightarrow{FQ}$，$\overrightarrow{RF}\parallel\overrightarrow{FN}$且$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{RF}=0$.求四边形 PRQN 面积 S 的最大值和最小值.

12．已知$\alpha$为锐角，且$\tan\alpha=\sqrt{2}-1$，函数$f(x)=x^2\tan 2\alpha+x\cdot\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$，数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$. ⑴ 求函数$f(x)$的表达式； ⑵ 求证：$a_{n+1}>a_n$；

⑶ 求证：$1<\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}<2\ \ (n\geq 2,n\in N^*)$

13．（本小题满分 14 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in N^*\right)$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足$4^{b_1-1}4^{b_2-1}4^{b_3-1}\cdots 4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$，证明：$\{a_n\}$是等差数列；

（Ⅲ）证明：$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{2}{3}\left(n\in N^*\right)$

14．已知函数$g(x)=-\frac{a^2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+cx(a\neq 0),$

（I）当$a=1$时，若函数$g(x)$在区间$(-1,1)$上是增函数，求实数$c$的取值范围；

（II）当$a\geq\frac{1}{2}$时，（1）求证：对任意的$x\in[0,1]$，$g^{/}(x)\leq 1$的充要条件是$c\leq\frac{3}{4}$；

（2）若关于$x$的实系数方程$g^{/}(x)=0$有两个实根$\alpha,\beta$，求证：$|\alpha|\leq 1,$且$|\beta|\leq 1$的充要条件是$-\frac{1}{4}\leq c\leq a^2-a.$

15．已知数列{a n}前 n 项的和为 S n，前 n 项的积为$T_n$，且满足$T_n=2^{n(1-n)}$。

①求$a_1$；②求证：数列{a n}是等比数列；③是否存在常数 a，使得$\left(S_{n+1}-a\right)^2=\left(S_{n+2}-a\right)\left(S_n-a\right)$对$n\in N^+$都成立？ 若存在，求出 a，若不存在，说明理由。

16、已知函数$y=f(x)$是定义域为 R 的偶函数，其图像均在 x 轴的上方，对任意的$m$、$n\in[0,+\infty)$，都有$f(m\ n)=[f(m)]^n$，且$f(2)=4$，又当$x\geq 0$时，其导函数$f^{'}(x)>0$恒成立。

（Ⅰ）求$F(0)$、$f(-1)$的值；（Ⅱ）解关于 x 的不等式：$\left[f(\frac{kx+2}{2\sqrt{x^2+4}})\right]^2\geq 2$，其中$k\in(-1,1).$

17、一个函数$f\left(x\right)$，如果对任意一个三角形，只要它的三边长$a,b,c$都在$f\left(x\right)$的定义域内，就有$f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(c\right)$也是某个三角形的三边长，则称$f\left(x\right)$为“保三角形函数”.

（I）判断$f_1\left(x\right)=\sqrt{x}$，$f_2\left(x\right)=x$，$f_3\left(x\right)=x^2$中，哪些是“保三角形函数”，哪些不是，并说明理由；

（II）如果$g\left(x\right)$是定义在**R**上的周期函数，且值域为$\left(0,+\infty\right)$，证明$g\left(x\right)$不是“保三角形函数”；

（III）若函数$F\left(x\right)=\sin x$，$x\in\left(0,A\right)$是“保三角形函数”，求$A$的最大值.

（可以利用公式$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$）

18、已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n$满足：$S_n=\frac{a}{a-1}(a_n-1)$（a 为常数，且$a\neq 0,a\neq 1$）．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）设$b_n=\frac{2S_n}{a_n}+1$，若数列$\{b_n\}$为等比数列，求 a 的值；

（Ⅲ）在满足条件（Ⅱ）的情形下，设$c_n=\frac{1}{1+a_n}+\frac{1}{1-a_{n+1}}$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 $T_n$．

求证：$T_n>2n-\frac{1}{3}$．

19、数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+cn$（$c$是常数，$n=1,2,3,\cdots$），且$a_1$，$a_2$，$a_3$成公比不为$1$的等比数列。（I）求$c$的值；（II）求$\{a_n\}$的通项公式。

（III）由数列$\{a_n\}$中的第 1、3、9、27、……项构成一个新的数列{b $_n$ }，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$的值。

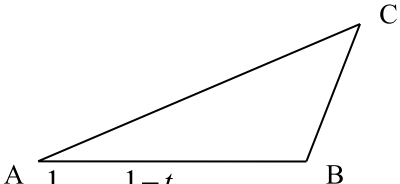
20、已知圆$M:(x+\sqrt{5})^2+y^2=36,$定点$N(\sqrt{5},0),$点$P$为圆$M$上的动点，点 Q 在 NP 上，点 G 在 MP 上，且满足$\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{NQ},\overrightarrow{GQ}\cdot\overrightarrow{NP}=0$.（I）求点 G 的轨迹 C 的方程；

（II）过点（2，0）作直线$l$，与曲线 C 交于 A、B 两点，O 是坐标原点，设$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$ 是否存在这样的直线$l$，使四边形 OASB 的对角线相等（即|OS|=|AB|）？若存在，求出直线$l$的方程；若不存在，试说明理由.

**21**．飞船返回仓顺利到达地球后，为了及时将航天员救出，地面指挥中心在返回仓预计到达区域安排三个救援中心（记为 A，B，C），B 在 A 的正东方向，相距 6km,C 在 B 的北偏东 $30^0$，相距 4km,P 为航天员着陆点，某一时刻 A 接到 P 的求救信号，由于 B、C 两地比 A 距 P 远，因此 4s 后，B、C 两个救援中心才同时接收到这一信号，已知该信号的传播速度为 1km/s.

（1）求 A、C 两个救援中心的距离；（2）求在 A 处发现 P 的方向角；

（3）若信号从 P 点的正上方 Q 点处发出，则 A、B 收到信号的时间差变大还是变小，并证明你的结论.



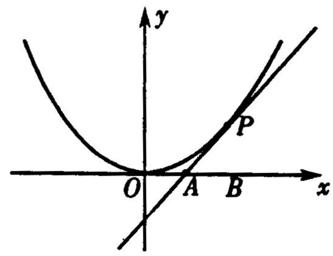

**22**．已知函数$y=|x|+1$，$y=\sqrt{x^2-2x+2+t}$，$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1-t}{x})\ (x>0)$ 的最小值恰好是方程$x^3+ax^2+bx+c=0$的三个根，其中$0<t<1$．（Ⅰ）求证：$a^2=2b+3$；

（Ⅱ）设$(x_1,M)$，$(x_2,N)$是函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$的两个极值点.

①若$|x_1-x_2|=\frac{2}{3}$，求函数$f(x)$的解析式；②求$|M-N|$的取值范围.

23．如图，已知直线$l$与抛物线$x^2=4y$相切于点$P(2，1)$，且与$x$轴交于点$A$，$O$为坐标原点，定点$B$的坐标为（2，0）．（I）若动点M满足$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\sqrt{2}|\overrightarrow{AM}|=0$，求点M的轨迹C；

（II）若过点B的直线$l'$（斜率不等于零）与（I）中的轨迹C交于不同的两点E、F（E在B、F之间），试求△OBE与△OBF面积之比的取值范围.




24．设$g(x)=px-\frac{q}{x}-2f(x),其中f(x)=\ln x,且g(e)=qe-\frac{p}{e}-2.$（$e$为自然对数的底数）

（I）求p与q的关系；（II）若$g(x)$在其定义域内为单调函数，求p的取值范围；

（III）证明：①$f(1+x)\le x\quad(x>-1)$；

②$\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n}{n^2}<\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$（$n$∈N，$n$≥2）.

25．已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$满足：$S_n=\frac{a}{a-1}(a_n-1)$（$a$为常数，且$a\neq 0,a\neq 1$）.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）设$b_0=\frac{2S_n}{a_n}+1$，若数列$\{b_n\}$为等比数列，求$a$的值；

（Ⅲ）在满足条件（Ⅱ）的情形下，设$c_n=\frac{1}{1+a_n}+\frac{1}{1-a_{n+1}}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n>2n-\frac{1}{3}$.

26、对于函数$f(x)$，若存在$x_0\in R$，使$f(x_0)=x_0$成立，则称$x_0$为$f(x)$的不动点.如果函数$f(x)=\frac{x^2+a}{bx-c}(b,c\in N^*)$有且仅有两个不动点0、2，且$f(-2)<-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）试求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）已知各项不为零的数列$\{a_n\}$满足$4S_n\ f(\frac{1}{a_n})=1$，求证：$-\frac{1}{a_{n+1}}<\ln\frac{n+1}{n}<-\frac{1}{a_n}$；

（III）设$b_n=-\frac{1}{a_n}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求证：$T_{2008}-1<\ln 2008<T_{2007}$.

27、已知函数$f(x)$的定义域为$\{x|\,x\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$，且对于定义域内的任何$x$、$y$，有$f(x-y)=\frac{f(x)\cdot f(y)+1}{f(y)-f(x)}$成立，且$f(a)=1$（$a$为正常数），当$0<x<2a$时，$f(x)>0$.（I）判断$f(x)$奇偶性；（II）证明$f(x)$为周期函数；（III）求$f(x)$在$[2a,3a]$上的最小值和最大值.

28、已知点R（－3,0）,点P在y轴上，点Q在x轴的正半轴上，点M在直线PQ上，且满足$2\overrightarrow{PM}+3\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$，$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PM}=0$.（Ⅰ）⑴当点P在y轴上移动时，求点M的轨迹C的方程；

（Ⅱ）设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$为轨迹C上两点，且$x_1>1,\ y_1>0$，N(1,0)，求实数$\lambda$，使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AN}$，且$|AB|=\frac{16}{3}$

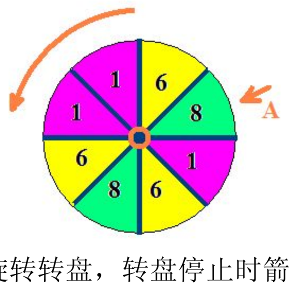
29、已知椭圆W的中心在原点，焦点在$x$轴上，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，两条准线间的距离为6. 椭圆W的左焦点为$F$，过左准线与$x$轴的交点$M$任作一条斜率不为零的直线$l$与椭圆W交于不同的两点$A$、$B$，点$A$关于$x$轴的对称点为$C$.

（Ⅰ）求椭圆W的方程；（Ⅱ）求证：$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$）；（Ⅲ）求$\Delta MBC$面积$S$的最大值.

30、已知抛物线$C:y=ax^2$，点$P$（1，－1）在抛物线$C$上，过点$P$作斜率为$k_1$、$k_2$的两条直线，分别交抛物线$C$于异于点$P$的两点$A$（$x_1$，$y_1$），$B$（$x_2$，$y_2$），且满足$k_1+k_2=0$.

（I）求抛物线$C$的焦点坐标；　　（II）若点$M$满足$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$，求点$M$的轨迹方程.

31．设函数$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx(a<b<c)$，其图象在点$A(1,f(1)),\ B(m,f(m))$处的切线的斜率分别为0，$-a$.（Ⅰ）求证：$0\leqslant\frac{b}{a}<1$；（Ⅱ）若函数$f(x)$的递增区间为$[s,\ t]$，求$|s-t|$的取值范围；（Ⅲ）若当$x\geqslant k$时（$k$是与$a,b,c$无关的常数），恒有$f^{-1}(x)+a<0$，试求$k$的最小值.



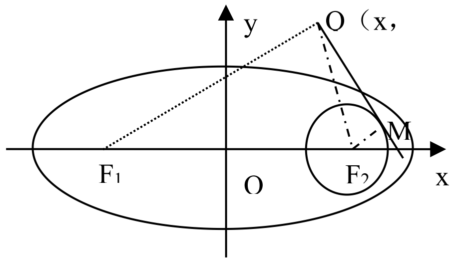

32．如图，转盘游戏．转盘被分成8个均匀的扇形区域．游戏规则：用力旋转转盘，转盘停止时箭头A所指区域的数字就是游戏所得的点数（转盘停留的位置是随机的）．假设箭头指到区域分界线

的概率为$0.1$，同时规定所得点数为 0．某同学进行了一次游戏，记所得点数为$\xi$．求$\xi$的分布列及数学期望．（数学期望结果保留两位有效数字）

33．设$F_1$，$F_2$分别是椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{6m^2}+\dfrac{y^2}{2m^2}=1\ (m>0)$的左，右焦点．

（1）当$P\in C$，且$\overrightarrow{PF_1}\ \overrightarrow{PF}_2=0$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=8$时，求椭圆 C 的左，右焦点$F_1$、$F_2$．

（2）$F_1$、$F_2$是（1）中的椭圆的左，右焦点，已知 $F_2$的半径是 1，过动点$Q$的作 $F_2$切线$QM$，使得$\left|QF_1\right|=\sqrt{2}\left|QM\right|$（$M$是切点），如下图．求动点$Q$的轨迹方程．




34．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=5$，$a_2=5$，$a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}(n\geq 2)$．

（1）求证：$\left\{a_{n+1}+2a_n\right\}$是等比数列；（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（3）设$3^n b_n=n(3^n-a_n)$，且$\left|b_1\right|+\left|b_2\right|++\left|b_n\right|<m$对于$n\in N^*$恒成立，求$m$的取值范

35．已知集合$D=\left\{(x_1, x_2)\middle| x_1>0, x_2>0, x_1+x_2=k\ \right\}$（其中$k$为正常数）．

（1）设$u=x_1x_2$，求$u$的取值范围；

（2）求证：当$k\geq 1$时不等式$(\dfrac{1}{x_1}-x_1)(\dfrac{1}{x_2}-x_2)\leq(\dfrac{k}{2}-\dfrac{2}{k})^2$对任意$(x_1,x_2)\in D$恒成立；

（3）求使不等式$(\dfrac{1}{x_1}-x_1)(\dfrac{1}{x_2}-x_2)\geq(\dfrac{k}{2}-\dfrac{2}{k})^2$对任意$(x_1,x_2)\in D$恒成立的$k^2$的范围．

36、已知椭圆 *C*：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，过右焦点 *F* 且斜率为 1 的直线交椭圆 *C* 于 *A*，*B* 两点，*N* 为弦 *AB* 的中点。（1）求直线 *ON*（*O* 为坐标原点）的斜率 $K_{ON}$；

（2）对于椭圆 *C* 上任意一点 M ，试证：总存在角$\theta$（$\theta\in$R）使等式：$\overrightarrow{OM}=\cos\theta\,\overrightarrow{OA}+\sin\theta\,\overrightarrow{OB}$成立。

37、已知曲线 C 上任意一点 M 到点 F（0，1）的距离比它到直线$l: y=-2$的距离小 1。

（1）求曲线 C 的方程；（2）过点$P(2,2)$的直线$m$与曲线$C$交于$A,B$两点,设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}.$

①当$\lambda=1$时,求直线$m$的方程；②当△AOB 的面积为$4\sqrt{2}$时（O 为坐标原点），求$\lambda$的值。

38、已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，对一切正整数$n$，点$P_n(n,S_n)$都在函数$f(x)=x^2+2x$的图像上，且过点$P_n(n,S_n)$的切线的斜率为$k_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式.　　（2）若$b_n=2^{k_n}a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

（3）设$Q=\{x|x=k_n,n\in N^*\},R=\{x|x=2a_n,n\in N^*\}$，等差数列$\{c_n\}$的任一项$c_n\in Q\cap R$，其中$c_1$是$Q\cap R$中的最小数，$110<c_{10}<115$，求$\{c_n\}$的通项公式.

39、已知$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$a_1=\dfrac{3}{2},\ a_2=2$，且$S_{n+1}-3S_n+2S_{n-1}+1=0$，其中$n\geq 2,n\in N^*$. (1)求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$；(2)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n-n}{a_n}$的值.(文) 求 $S_n$.

40、函数$f(x)$对任意 x∈R 都有 f(x)＋f(1－x)=$\frac{1}{2}$.　（1）求$f(\frac{1}{2})和f(\frac{1}{n})+f(\frac{n-1}{n})(n\in N)$的值；

（2）数列$\{a_n\}满足a_n=f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})+f(1),求数列\{a_n\}$的通项公式。

（3）令$b_n=\dfrac{4}{4a_n-1},T_n=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2,S_n=32-\dfrac{16}{n}$试比较 $T_n$与 $S_n$的大小。

**41**．已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2a+1$（a 是常数，且$a\neq-1$），$a_n=2a_{n-1}+n^2-4n+2$（$n\geq 2$），数列$\{b_n\}$的首项$b_1=a$，$b_n=a_n+n^2$（$n\geq 2$）。

（1）证明：$\{b_n\}$从第 2 项起是以 2 为公比的等比数列；

（2）设$S_n$为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，且$\{S_n\}$是等比数列，求实数 a 的值；

（3）当 a>0 时，求数列$\{a_n\}$的最小项。

**42**．已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$上任意一点到焦点 F 的距离比到 y 轴的距离大 1。

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若过焦点 F 的直线交抛物线于 M、N 两点，M 在第一象限，且|MF|=2|NF|，求直线 MN 的方程；

（3）求出一个数学问题的正确结论后，将其作为条件之一，提出与原来问题有关的新问题，我们把它称为原来问题的一个“逆向”问题.

例如，原来问题是“若正四棱锥底面边长为 4，侧棱长为 3，求该正四棱锥

的体积”．求出体积$\frac{16}{3}$后，它的一个“逆向”问题可以是“若正四棱锥底面边长为 4，体积为$\frac{16}{3}$，求侧棱长”；也可以是“若正四棱锥的体积为$\frac{16}{3}$，求所有侧面面积之和的最小值”．

现有正确命题：过点$A(-\frac{p}{2},0)$的直线交抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$于 P、Q 两点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 R，则直线 RQ 必过焦点 F。

试给出上述命题的“逆向”问题，并解答你所给出的“逆向”问题。

**43．** 已知函数 $f(x)=\frac{5+2x}{16-8x}$，设正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

(I)写出$a_2$，$a_3$的值；　　(Ⅱ)试比较$a_n$与$\frac{5}{4}$的大小，并说明理由；

(Ⅲ)设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{5}{4}-a_n$，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$．证明：当 n≥2 时，$S_n<\frac{1}{4}(2^n-1)$．

**44．** 已知函数 $f(x)=x^3-3ax(a\in R)$． (I)当 a=1 时，求 f(x)的极小值；

(Ⅱ)若直线菇 x+y+m=0 对任意的 m∈R 都不是曲线 y=f(x)的切线，求 a 的取值范围；

(Ⅲ)设 g(x)=|f(x)|，x∈[－1，1]，求 g(x)的最大值 F(a)的解析式．

**45．** 在平面直角坐标系中，已知三个点列$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，$\{C_n\}$，其中$A_n(n,a_n),B_n(n,b_n)$

$C_n(n-1,0)$，满足向量$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$与向量$\overrightarrow{B_nC_n}$共线，且点（B，n）在方向向量为（1，6）的线上$a_1=a,b_1=-a.$　　（1）试用 $a$ 与 n 表示$a_n(n\ge 2)$；

（2）若 $a_6$与 $a_7$两项中至少有一项是 $a_n$的最小值，试求 $a$ 的取值范围。

**46．** 已知$F_1(-2,0),F_2(2,0)$,点$P$满足$|PF_1|-|PF_2|=2$，记点 $P$ 的轨迹为 $E$.　（1）求轨迹 $E$ 的方程；

（2）若直线 $l$ 过点 $F_2$且与轨迹 $E$ 交于 $P$、$Q$ 两点．（i）无论直线 $l$ 绕点 $F_2$怎样转动，在 $x$ 轴上总存在定点$M(m,0)$，使$MP\perp MQ$恒成立，求实数 $m$ 的值.

（ii）过 $P$、$Q$ 作直线$x=\frac{1}{2}$的垂线 $PA$、$OB$，垂足分别为 $A$、$B$，记$\lambda=\frac{|PA|+|QB|}{|AB|}$，求λ的取值范围.

**47．** 设 $x_1$、$x_2(x_1\ne x_2)$是函数$f(x)=ax^3+bx^2-a^2x(a>0)$ 的两个极值点.

（1）若$x_1=-1,x_2=2$，求函数 $f(x)$的解析式；　　（2）若$|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$,求$b$的最大值；

（3）若$x_1<x<x_2$,且$x_2=a$,函数$g(x)=f'(x)-a(x-x_1)$，求证：$|g(x)|\le\frac{1}{12}a(3a+2)^2$.

**48．** 已知$f(x)=\log_a x(0<a<1),\{a_n\}$，若数列$\{a_n\}$

使得$2,f(a_1),f(a_2),f(a_3),\ldots\ldots,f(a_n),2n+4(n\in N^*)$成等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项 $a_n$；

（2）设$b_n = a_n \cdot f(a_n)$，若{$b_n$}的前 n 项和是 $S_n$，且$\frac{2a^4}{1-a^2}<1$,求证：$S_n+\frac{2na^{2n+4}}{1-a^2}<3.$

**49．** 点 P 在以$F_1,F_2$为焦点的双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$上，已知$PF_1\perp PF_2$，$|PF_1|=2|PF_2|$，O 为坐标原点．（Ⅰ）求双曲线的离心率$e$；

（Ⅱ）过点 P 作直线分别与双曲线渐近线相交于$P_1,P_2$两点，且$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=-\frac{27}{4}$，$2\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\vec{0}$，求双曲线 E 的方程；

（Ⅲ）若过点$Q(m,0)$（$m$为非零常数）的直线$l$与（2）中双曲线 E 相交于不同于双曲线顶点的两点 M、N，且$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{QN}$（$\lambda$为非零常数），问在$x$轴上是否存在定点 G，使$\overrightarrow{F_1F_2}\perp(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN})$？若存在，求出所有这种定点 G 的坐标；若不存在，请说明理由．

**50.** 已知函数$f(x)=ax^3+3x^2-6ax-11$，$g(x)=3x^2+6x+12$，和直线$m:y=kx+9$，又$f'(-1)=0$．（Ⅰ）求$a$的值；

（Ⅱ）是否存在$k$的值，使直线$m$既是曲线$y=f(x)$的切线，又是$y=g(x)$的切线；如果存在，求出$k$的值；如果不存在,说明理由．

（Ⅲ）如果对于所有$x\geq -2$的$x$，都有$f(x)\leq kx+9\leq g(x)$成立，求$k$的取值范围．

**51．** 已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c,(a,b,c\in R)$满足：对任意实数 x，都有$f(x)\geq x$，且当$x\in$（1，3）时，有$f(x)\leq\frac{1}{8}(x+2)^2$成立。（1）证明：$f(2)=2$。

（2）若$f(-2)=0, f(x)$的表达式。

（3）设$g(x)=f(x)-\frac{m}{2}x\quad x\in[0,+\infty)$，若$g(x)$图上的点都位于直线$y=\frac{1}{4}$的上方，求实数 m 的取值范围。

**52．**（1）数列{$a_n$}和{$b_n$}满足$a_n=\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$（n=1，2，3⋯），求证{$b_n$}为等差数列的充要条件是{$a_n$}为等差数列。（8 分）

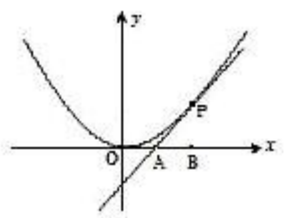
（2）数列{$a_n$}和{$c_n$}满足$c_n=a_n+2a_{n+1}(n\in N^*)$，探究$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件，需说明理由。[提示：设数列{$b_n$}为$b_n=a_n-a_{n+2}(n=1,2,3\cdots)$

**53．** 某次象棋比赛的决赛在甲乙两名棋手之间举行，比赛采用积分制，比赛规则规定赢一局得 2 分，

平一局得 1 分，输一局得 0 分；比赛共进行五局，积分有超过 5 分者比赛结束，否则继续进行. 根据以往经验，每局甲赢的概率为 $\frac{1}{2}$，乙赢的概率为 $\frac{1}{3}$，且每局比赛输赢互不受影响. 若甲第 n 局赢、平、输的得分分别记为 $a_n=2$、$a_n=1$、$a_n=0$ $n\in N^*,1\le n\le 5$, 令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(Ⅰ)求 $S_3=5$ 的概率；（Ⅱ）若随机变量 $\xi$ 满足 $S_\xi=7$（$\xi$ 表示局数），求 $\xi$ 的分布列和期望.

**54**．如图，已知直线 $l$ 与抛物线 $x^2=4y$ 相切于点 P(2, 1)，且与 $x$ 轴交于点 A，定点 B 的坐标为 (2, 0)．（I）若动点 M 满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\sqrt{2}\left|\overrightarrow{AM}\right|=0$，求点 M 的轨迹 C；（II）若过点 B 的直线 $l'$（斜率不等于零）与（I）中的轨迹 C 交于不同的两点 E、F（E 在 B、F 之间），试求 ΔOBE 与 ΔOBF 面积之比的取值范围.



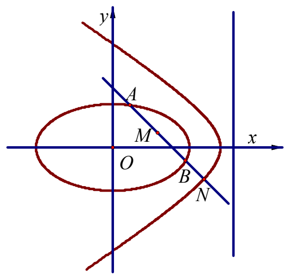

55,已知 $A$、$B$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条弦，$M$(2，1)是 $AB$ 中点，以 $M$ 为焦点，以椭圆的右准线为相应准线的双曲线与直线 $AB$ 交于 $N$(4，—1).

(1)设双曲线的离心率 $e$，试将 $e$ 表示为椭圆的半长轴长的函数.

(2)当椭圆的离心率是双曲线的离心率的倒数时，求椭圆的方程.

(3)求出椭圆长轴长的取值范围.

56 已知：$f(x)=-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$,数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,点$P_n(a_n,-\frac{1}{a_{n+1}})$ 在曲线 $y=f(x)$上$(n\in N^*)$,且$a_1=1,a_n>0$.




（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和为 $T_n$，且满足 $\frac{T_{n+1}}{a_n^2}=\frac{T_n}{a_{n+1}^2}+16n^2-8n-3$，设定 $b_1$ 的值，使得数列$\{b_n\}$是等差数列；（3）求证：$S_n>\frac{1}{2}\sqrt{4n+1}-1,n\in N^*$

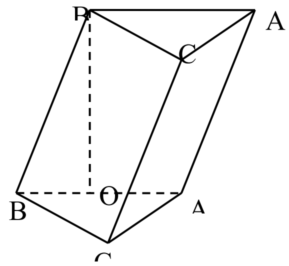
57、已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n$，并且满足 $a_1=2,na_{n+1}=S_n+n(n+1)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$；（2）设$T_n$为数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$的前$n$项和,求$T_n$.

58、已知向量 $m=(\frac{1}{a},\frac{1}{2a})$ $(a>0)$，将函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2-a$ 的图象按向量 m 平移后得到函数 $g(x)$ 的图象。

（Ⅰ）求函数 $g(x)$ 的表达式；（Ⅱ）若函数 $g(x)$在$[\sqrt{2},2]$ 上的最小值为 $h(a)$，求$h(a)$ 的最大值。

59、已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2， 侧棱 $BB_1$ 与底面 $ABC$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，且侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 $ABC$.

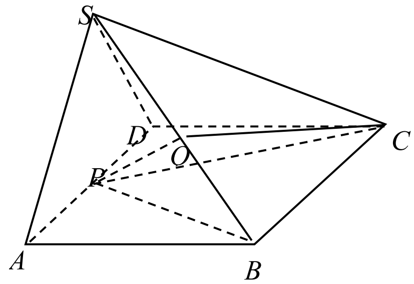



（1）证明：点 $B_1$ 在平面 $ABC$ 上的射影 $O$ 为 $AB$ 的中点；

（2）求二面角 $C-AB_1-B$ 的大小 ；（3）求点 $C_1$ 到平面 $CB_1A$ 的距离.

60、如图，已知四棱锥 $S-ABCD$ 中， $\Delta SAD$ 是边长为 $a$ 的正三角形，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle DAB=60^\circ$， $P$ 为 $AD$ 的中点，$Q$ 为 $SB$ 的中点.

（Ⅰ）求证：$PQ//$ 平面 $SCD$；（Ⅱ）求二面角 $B-PC-Q$ 的大小.




61．设集合 W 是满足下列两个条件的无穷数列$\{a_n\}$的集合：

①$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\le a_{n+1}$；　　　②$a_n\le M$.其中$n\in N^*$,M 是与 n 无关的常数.

（1）若$\{a_n\}$是等差数列，$S_n$是其前 n 项的和，$a_3=4$，$S_3=18$，证明：$\{S_n\}\in W$

（2）设数列$\{b_n\}$的通项为 $b_n=5n-2^n$,且$\{b_n\}\in W$，求 M 的取值范围；

（3）设数列$\{c_n\}$的各项均为正整数，且$\{c_n\}\in W$.证明：$c_n\le c_{n+1}$

62．数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$（$n\in\mathbf{N}_+$）由下列条件确定：（1） $a_1<0$，$b_1>0$；

（2）当 $k\ge 2$ 时，$a_k$ 与 $b_k$ 满足如下条件：当 $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\ge 0$ 时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$；当 $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$ 时，$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，$b_k=b_{k-1}$.

解答下列问题：（Ⅰ）证明数列$\{a_k-b_k\}$是等比数列；

（Ⅱ）记数列$\{n(b_k-a_n)\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若已知当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

（Ⅲ）$n(n\ge 2)$ 是满足 $b_1>b_2>\cdots>b_n$ 的最大整数时，用 $a_1$，$b_1$ 表示 $n$ 满足的条件.

63. 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+ax, x\in(0,+\infty)$ （a 为实常数）.

(1) 当 a = 0 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)若 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是单调函数，求 a 的取值范围；

(3) 设各项为正的无穷数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1\left(n \in N^*\right)$，证明：$x_n \leqslant 1$ (n∈N*).

**64.** 设函数$f(x) = x^3 + ax^2 + bx\ (x > 0)$的图象与直线$y = 4$相切于$M(1,4)$.

（Ⅰ）求$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$在区间$(0,4]$上的最大值与最小值；

（Ⅱ）是否存在两个不等正数$s,t\ (s < t)$，当$x \in [s,t]$时，函数$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$的值域也是$[s,t]$，若存在，求出所有这样的正数$s,t$；若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）设存在两个不等正数$s,t\ (s < t)$，当$x \in [s,t]$时，函数$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$的值域是$[ks,kt]$，求正数$k$的取值范围.

**65.** 已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1 = 1$，$na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(n \in N^*\right)$.

（1）求$a_2, a_3, a_4$；　　（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项$a_n$；

（3）设数列$\{b_n\}$满足$b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{1}{a_k} b_n^2 + b_n$，求证：$b_n < 1(n \le k)$

66、设函数$f\left(x\right) = \left(1+x\right)^2 - 2\ln\left(1+x\right)$. (1)求$f\left(x\right)$的单调区间;

(2)若当$x \in \left[\frac{1}{e} - 1, e - 1\right]$时, (其中$e = 2.718\cdots$)不等式$f\left(x\right) < m$恒成立, 求实数$m$的取值范围;

(3)试讨论关于$x$的方程: $f\left(x\right) = x^2 + x + a$在区间$\left[0,2\right]$上的根的个数.

67、已知$f(x) = x^2 + ax + a\ (a \le 2, x \in R)$，$g(x) = e^{-x}$，$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$.

（1）当$a = 1$时，求$\Phi(x)$的单调区间；

（2）求$g(x)$在点$(0,1)$处的切线与直线$x = 1$及曲线$g(x)$所围成的封闭图形的面积；

（3）是否存在实数$a$，使$\Phi(x)$的极大值为3？若存在，求出$a$的值，若不存在，请说明理由.

68、已知椭圆$C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，直线 *l*：*y*=*x*+2 与以原点为圆心、椭圆$C_1$的短半轴长为半径的圆 O 相切。　（1）求椭圆$C_1$的方程；

（2）设椭圆$C_1$的左焦点为$F_1$，右焦点为$F_2$，直线$l_1$过点$F_1$，且垂直于椭圆的长轴，动直线$l_2$垂直于$l_1$，垂足为点 P，线段$PF_2$的垂直平分线交$l_2$于点 M，求点 M 的轨迹$C_2$的方程；

（3）设$C_2$与 x 轴交于点 Q，不同的两点 R、S 在$C_2$上，且 满足$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$，

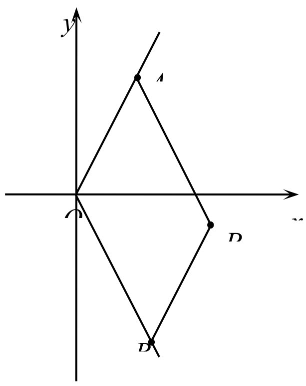
求$|\overrightarrow{QS}|$的取值范围。

69、已知$F_1,F_2$是椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的左、右焦点，点P$(-\sqrt{2},1)$在椭圆上，线段$PF_2$与y轴的交点M满足$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{F_2M}=0$。（1）求椭圆C的方程。（2）椭圆C上任一动点M$(x_0,y_0)$关于直线y=2x的对称点为$M_1$（$x_1,y_1$）,求$3x_1-4y_1$的取值范围。

70、已知$A,B,C$均在椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$上，直线$AB$、$AC$分别过椭圆的左右焦点$F_1$、$F_2$，当$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$时，有$9\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{AF_1}^2$.

(Ⅰ)求椭圆$M$的方程；（Ⅱ)设$P$是椭圆$M$上的任一点，$EF$为圆$N:x^2+(y-2)^2=1$的任一条直径，求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值.

**71.**如图，$A(m,\sqrt{3}m)$和$B(n,-\sqrt{3}n)$两点分别在射线OS、OT上移动，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$，$O$为坐标原点，动点$P$满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.



（Ⅰ）求$m\cdot n$的值；
（Ⅱ）求P点的轨迹C的方程，并说明它表示怎样的曲线？
（Ⅲ）若直线$l$过点E（2，0）交（Ⅱ）中曲线C于M、N两点，且$\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{EN}$，求$l$的方程.

**72.**已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x,\quad g(x)=(a+1)x\ \ (a\neq-1),\ H(x)=f(x)-g(x)$。

(1)若函数$f$（$x$）、$g$（$x$）在区间[1，2]上都为单调函数且它们的单调性相同，求实数$a$的取值范围；

(2)α、β是函数$H$（$x$）的两个极值点，α<β，$\beta\in(1,\ e]\ (e=2.71828\cdots)$。求证：对任意的$x_1$、$x_2\in[\alpha,\ \beta]$，不等式$|H(x_1)-H(x_2)|<1$成立

**73.** 设$f(x)$是定义在$[-1,1]$上的奇函数，且当$-1\le x<0$时， $f(x)=2x^3+5ax^2+4a^2x+b$

(Ⅰ)求函数$f(x)$的解析式； (Ⅱ) 当$1<a\le3$时，求函数$f(x)$在$(0,1]$上的最大值$g(a)$；

(III)如果对满足$1<a\le3$的一切实数$a$，函数$f(x)$在$(0,1]$上恒有$f(x)\le0$，求实数$b$的取值范围.

**74.**已知椭圆$C$的中心为原点，点$F$ $(1,0)$是它的一个焦点，直线$l$过点$F$与椭圆$C$交于$A,B$两点，且当直线$l$垂直于$x$轴时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{5}{6}$. （Ⅰ）求椭圆$C$的方程；

（Ⅱ）是否存在直线$l$，使得在椭圆$C$的右准线上可以找到一点$P$，满足$\Delta ABP$为正三角形．如果存在，求出直线$l$的方程；如果不存在，请说明理由．

75．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1}-2}(n\ge 2, n\in N)$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$；（Ⅱ）设$b_n=\frac{1}{a_n^{\ 2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$；

（Ⅲ）设$c_n=a_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$．求证：对任意的$n\in N^*$，$T_n<\frac{4}{7}$．

**76**、已知函数$f(x)=(x^2-x-\frac{1}{a})e^{ax}(a\ne 0)$

（1）求曲线$y=f(x)$在点$A(0,f(0))$处的切线方程

（2）当$a<0$时，求函数$f(x)$的单调区间

（3）当$a>0$时，若不等式$f(x)+\frac{3}{a}\ge 0,对x\in\left[-\frac{3}{a},+\infty\right)$恒成立，求$a$的取值范围。

**77**、已知函数$f(x)=\frac{x-a}{\ln x}$，其中$a$为实数．

(1)当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程；

(2)是否存在实数$a$，使得对任意$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f(x)>\sqrt{x}$恒成立?若不存在，请说明理由，若存在，求出$a$的值并加以证明．

78、已知$f(x)=\ln x, g(x)=\frac{1}{2}x^2+mx+\frac{7}{2}(m<0)$，直线$l$与函数$f(x)$、$g(x)$的图像都相切，且与函数$f(x)$的图像的切点的横坐标为 1。（Ⅰ）求直线$l$的方程及$m$的值；

（Ⅱ）若$h(x)=f(x+1)-g'(x)(其中g'(x)是g(x)$的导函数），求函数$h(x)$的最大值；

（Ⅲ）当$0<b<a$时，比较：$a+2af(a+b)$与$b+2af(2a)$的大小，

79、已知抛物线$C$：$y^2=4x$的准线与$x$轴交于$M$点，过$M$点斜率为$k$的直线$l$与抛物线$C$交于$A$、$B$两点($A$在$M$、$B$之间)．(1)$F$为抛物线$C$的焦点，若$|AM|=\frac{5}{4}|AF|$，求$k$的值；

(2)如果抛物线$C$上总存在点$Q$，使得$QA\perp QB$，试求$k$的取值范围．

80、在平面直角坐标系中，已知定圆 F:$(x-1)^2+y^2=1$（F 为圆心），定直线$l: x=-2$,作与圆 F 内切且和直线$l$相切的动圆 P，(1)试求动圆圆心 P 的轨迹 E 的方程。

（2）设过定圆心 F 的直线 $m$ 自下而上依次交轨迹 E 及定园 F 于点 A、B、C、D，

①是否存在直线 $m$，使得 $|AD|=2|BC|$ 成立？若存在，请求出这条直线的方程；若不存在，请说明理由。 ②当直线 $m$ 绕点 F 转动时，$|AB|\cdot|CD|$ 的值是否为定值？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由。

81. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+n$ 的图像过点 $(1,3)$，且 $f(-1+x)=f(-1-x)$ 对任意实数都成立，函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称。 $f(-1+x)=f(-1-x)$，$f(1)=3$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $F(x)=g(x)—\lambda f(x)$ 在[-1，1]上是增函数，求实数 λ 的取值范围；

82. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=6,a_2=b_2=4,a_3=b_3=3$，且数列 $\{a_{n+1}-a_n\}(n\in N^+)$ 是等差数列，数列 $\{b_n-2\}(n\in N^+)$ 是等比数列。 （I）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（II）是否存在 $k\in N^+$，使 $a_k-b_k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，若存在，求出 $k$，若不存在，说明理由。

83. 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和 $S_n$ 与 $a_n$ 之间满足 $a_n=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geq 2)$.

（1）求证：数列 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 的通项公式； （2）设存在正数 k，使 $(1+S_1)(1+S_2)\cdots(1+S_n)\geq k\sqrt{2n+1}$ 对一切 $n\in N^*$ 都成立，求 k 的最大值.

84. 已知 $F_1$、$F_2$ 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，其左准线与 $x$ 轴相交于点 $N$，并且满足，$\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{NF_1},|\overrightarrow{F_1F_2}|=2.$ 设 A、B 是上半椭圆上满足 $\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB}$ 的两点，其中 $\lambda\in[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$.

（1）求此椭圆的方程及直线 AB 的斜率的取值范围；

（2）设 A、B 两点分别作此椭圆的切线，两切线相交于一点 P，求证：点 P 在一条定直线上，并求点 P 的纵坐标的取值范围.

85. 已知函数 $f(x)=\ln(x+\dfrac{3}{2})+\dfrac{2}{x},g(x)=\ln x.$ （1）求函数 $f(x)$ 是单调区间；

（2）如果关于 $x$ 的方程 $g(x)=\dfrac{1}{2}x+m$ 有实数根，求实数 $m$ 的取值集合；

（3）是否存在正数 k，使得关于 $x$ 的方程 $f(x)=kg(x)$ 有两个不相等的实数根？如果存在，求 k

满足的条件；如果不存在，说明理由.

86、已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 $F$，直线 $l$ 过点 $A(4,0)$ 且与抛物线交于 $P,Q$ 两点. 并设以弦 $PQ$ 为直径的圆恒过原点.（Ⅰ）求焦点坐标；（Ⅱ）若 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FR}$，试求动点 $R$ 的轨迹方程.

87、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点到右焦点 F 的最小距离是 $\sqrt{2}-1$，$F$ 到上顶点的距离为 $\sqrt{2}$，点 $C(m,0)$ 是线段 $OF$ 上的一个动点.（I）求椭圆的方程;

（Ⅱ）是否存在过点 $F$ 且与 $x$ 轴不垂直的直线 $l$ 与椭圆交于 $A$、$B$ 两点,使得 $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\perp\overrightarrow{BA}$,并说明理由.

88、椭圆的对称中心在坐标原点，一个顶点为 $A(0,2)$，右焦点 $F$ 与点 $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 的距离为 $2$。

（1）求椭圆的方程；（2）是否存在斜率 $k\neq 0$ 的直线 $l$：$y=kx-2$，使直线 $l$ 与椭圆相交于不同的两点 $M$，$N$ 满足 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{AN}|$，若存在，求直线 $l$ 的倾斜角 $\alpha$；若不存在，说明理由。

89、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n$，且对一切正整数 n 都有 $S_n=n^2+\frac{1}{2}a_n$。

（1）证明：$a_{n+1}+a_n=4n+2$；（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）设 $f(n)=\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\sqrt{2n+1}$，求证：$f(n+1)<f(n)$ 对 $n\in N^*$ 都成立。

90、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项为 $a-1,4,2a$,记前 $n$ 项和为 $S_n$.

（Ⅰ）设 $S_k=2550$，求 $a$ 和 $k$ 的值；　（Ⅱ）设 $b_n=\frac{S_n}{n}$，求 $b_3+b_7+b_{11}+\cdots+b_{4n-1}$ 的值.

**91.** 已知 $f(x)$ 定义在 R 上的函数，对于任意的实数 a，b 都有 $f(ab)=af(b)+bf(a)$，且 $f(2)=1$

（1）求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值，　（2）求 $f\left(2^{-n}\right)$ 的解析式（$n\in N^*$）

**92.** 设函数 $f(x)=x|x-a|+b$　（1）求证：$f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $a^2+b^2=0$

（2）设常数 $b<2\sqrt{2}-3$，且对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)<0$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围

93. 已知函数 $f(x)=x^2+(a-3)x+a^2-3a$（$a$ 为常数）.

（1）如果对任意 $x\in[1,2], f(x)>a^2$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

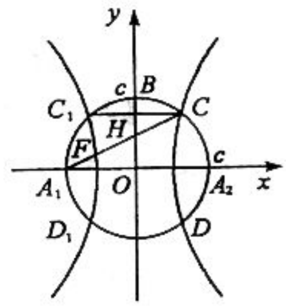
（2）设实数 $p,q,r$ 满足：$p,q,r$ 中的某一个数恰好等于 $a$，且另两个恰为方程 $f(x)=0$ 的两实根，判断① $p+q+r$，② $p^2+q^2+r^2$，③ $p^3+q^3+r^3$ 是否为定值？若是定值请求出：若不是定值，请把不是定值的表示为函数 $g(a)$，并求 $g(a)$ 的最小值；

（3）对于（2）中的 $g(a)$，设 $H(a)=-\frac{1}{6}[g(a)-27]$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=H(a_n)\quad(n\in N^*)$，且 $a_1\in(0,1)$，试判断 $a_{n+1}$ 与 $a_n$ 的大小，并证明.

94．如图，以 $A_1$，$A_2$ 为焦点的双曲线 E 与半径为 c 的圆 O 相交于 C，D，$C_1$，$D_1$，连接 $CC_1$ 与 OB 交于点 H，且有：$\overrightarrow{OH}=(3+2\sqrt{3})\overrightarrow{HB}$。其中 $A_1$，$A_2$，B 是圆 O 与坐标轴的交点，c 为双曲线的半焦距。（1）当 c=1 时，求双曲线 E 的方程；

（2）试证：对任意正实数 c，双曲线 E 的离心率为常数。

（3）连接 $A_1C$ 与双曲线 E 交于 F，是否存在实数 $\lambda$, 使 $\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{FC}$ 恒成立，若存在，试求出 $\lambda$ 的值；若不存在，请说明理由.




95. 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx(a<b<c)$,其图象在点$A(1,f(1),B(m,f(m))$ 处的切线的斜率分别为 0，－a.　　　（1）求证：$0\le\frac{b}{a}<1$；

（2）若函数 f（x）的递增区间为[s，t]，求|s－t|的取值范围.

（3）若当 x≥k 时，（k 是 a，b，c 无关的常数），恒有 $f'(x)+a<0$，试求 k 的最小值

96．设函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a,b为实数),F(x)=\begin{cases}f(x) & (x>0)\\ -f(x) & (x<)\end{cases}$

（1）若 $f(-1)=0$ 且对任意实数均有 $f(x)\ge 0$ 成立，求 $F(x)$ 表达式；

（2）在（1）在条件下，当 $x\in[-2,2]$时，$g(x)=f(x)-kx$ 是单调函数，求实数 k 的取值范围；

（3）设 mn<0，m+n>0，$a$>0 且 $f(x)$ 为偶函数，证明 $F(m)+F(n)>0$.

97．在平面直角坐标系内有两个定点 $F_1$、$F_2$ 和动点 P，$F_1$、$F_2$ 坐标分别为 $F_1(-1,0)$ 、$F_2(1,0)$，动点 $P$ 满足 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，动点 $P$ 的轨迹为曲线 $C$，曲线 $C$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线为曲线 $C'$，直线 $y=x+m-3$ 与曲线 $C'$ 交于 A、B 两点，O 是坐标原点，△ABO 的面积为 $\sqrt{7}$，

（1）求曲线 C 的方程；　（2）求 m 的值。

98. 数列$\{a_n\}$，$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-n^2+3n(n\in N^*)$

(1)是否存在常数$\lambda$、$\mu$，使得数列$\{a_n+\lambda n^2+\mu n\}$是等比数列，若存在，求出$\lambda$、$\mu$的值，若不存在，说明理由。

(2)设$b_n=\dfrac{1}{a_n+n-2^{n-1}}$，$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，证明：当$n\geq 2$时，$\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}<S_n<\dfrac{5}{3}$.

99、数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n, a_1=10, a_{n+1}=9S_n+10$。

（I）求证：$\{\lg a_n\}$是等差数列；（II）设$T_n$是数列$\left\{\dfrac{3}{(\lg a_n)(\lg a_{n+1})}\right\}$的前$n$项和，求$T_n$；

（III）求使$T_n>\dfrac{1}{4}(m^2-5m)$对所有的$n\in N^*$恒成立的整数$m$的取值集合。

100、已知数列｛$a_n$｝中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，点（$n,2a_{n+1}-a_n$）在直线 y=x 上，其中 n=1, 2, 3….

（1）令$b_n=a_{n+1}-a_n-1$，求证数列$\{b_n\}$是等比数列；（2）求数列$\{a_n\}$的通项；

(3) 设$S_n$、$T_n$分别为数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 $n$ 项和，是否存在实数$\lambda$，使得数列$\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$为等差数列？若存在，试求出$\lambda$．若不存在，则说明理由。

# 黄冈中学 2011 年高考数学压轴题汇总详细解答

**1**．解：（I）$g(x)=\begin{cases}1-ax,1\leq x\leq 2\\(1-a)x-1,2<x\leq 3\end{cases}$

（1）当$a<0$时，函数$g(x)$是$[1,3]$增函数，此时，$g(x)_{\max}=g(3)=2-3a$，

$g(x)_{\min}=g(1)=1-a$，所以$h(a)=1-2a$；——2 分

（2）当$a>1$时，函数$g(x)$是$[1,3]$减函数，此时，$g(x)_{\min}=g(3)=2-3a$，

$g(x)_{\max}=g(1)=1-a$，所以$h(a)=2a-1$；————4 分

（3）当$0\leq a\leq 1$时，若$x\in[1,2]$，则$g(x)=1-ax$，有$g(2)\leq g(x)\leq g(1)$；

若$x\in[2,3]$，则$g(x)=(1-a)x-1$，有$g(2)\leq g(x)\leq g(3)$；

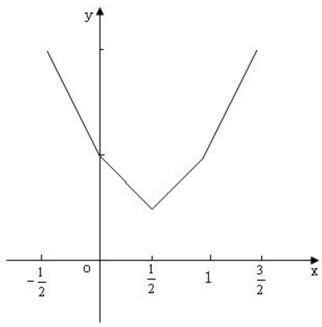
因此，$g(x)_{\min}=g(2)=1-2a$，————6 分

而$g(3)-g(1)=(2-3a)-(1-a)=1-2a$，

故当$0\leq a\leq\dfrac{1}{2}$时，$g(x)_{\max}=g(3)=2-3a$，有$h(a)=1-a$；

当$\frac{1}{2}<a\le 1$时，$g\left(x\right)_{\max}=g\left(1\right)=1-a$，有$h\left(a\right)=a$；————8 分

综上所述：$h\left(a\right)=\begin{cases}1-2a,a<0\\1-a,0\le a\le\frac{1}{2}\\a,\frac{1}{2}<a\le 1\\2a-1,a>1\end{cases}$。————10 分




（II）画出$y=h\left(x\right)$的图象，如右图。————12 分

数形结合，可得$h\left(x\right)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$。————14 分

**2**．解:(Ⅰ)先用数学归纳法证明$0<a_n<1,n\in N^*$.

（1）当 n=1 时,由已知得结论成立;

（2）假设当 n=k 时,结论成立,即$0<a_k<1$.则当 n=k+1 时,

因为 0<x<1 时,$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$,所以 f(x)在(0,1)上是增函数.

又 f(x)在$\left[0,1\right]$上连续,所以 f(0)<f($a_k$)<f(1),即 0<$a_{k+1}<1-\ln 2<1$.

故当 n=k+1 时,结论也成立. 即$0<a_n<1$对于一切正整数都成立.————4 分

又由$0<a_n<1$，得$a_{n+1}-a_n=a_n-\ln\left(1+a_n\right)-a_n=-\ln(1+a_n)<0$,从而$a_{n+1}<a_n$.

综上可知$0<a_{n+1}<a_n<1$.————6 分

(Ⅱ)构造函数 g(x)=$\frac{x^2}{2}$-f(x)= $\frac{x^2}{2}+\ln(1+x)-x$, 0<x<1,

由$g'(x)=\frac{x^2}{1+x}>0$,知 g(x)在(0,1)上增函数.又 g(x)在$\left[0,1\right]$上连续,所以 g(x)>g(0)=0.

因为$0<a_n<1$,所以$g\left(a_n\right)>0$,即$\frac{{a_n}^2}{2}-f\left(a_n\right)$>0,从而$a_{n+1}<\frac{{a_n}^2}{2}$.————10 分

(III) 因为 $b_1=\frac{1}{2},b_{n+1}\ge\frac{1}{2}(n+1)b_n$,所以$b_n>0$,$\frac{b_{n+1}}{b_n}\ge\frac{n+1}{2}$ ,

所以$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1\ge\frac{1}{2^n}\cdot n!$ ————①,————12 分

由(Ⅱ) $a_{n+1} < \frac{a_n^{\ 2}}{2}$, 知: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_n}{2}$，所以 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_{n-1}}{2}$，

因为 $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, n≥2, $0 < a_{n+1} < a_n < 1$.

所以 $a_n < \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_{n-1}}{2} \cdot a_1 < \frac{a_1^{\ n}}{2^{n-1}} < \frac{2 \cdot a_1^{\ 2}}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ ————②. ————14 分

由①② 两式可知: $b_n > a_n \cdot n!$.————16 分

**3**.（Ⅰ）在 $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cos 2x_2+4a\sin^2 x_2$ 中, 分别令 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x \end{cases}$；$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4}+x \\ x_2 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$；

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} \\ x_2 = \frac{\pi}{4}+x \end{cases}$ 得 $\begin{cases} f(x)+f(-x)=2\cos 2x+4a\sin^2 x, & ① \\ f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x)=2a, & ② \\ f(\frac{\pi}{2}+x)+f(-x)=2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)+4a\sin^2(\frac{\pi}{4}+x) & ③ \end{cases}$

由①＋②－③,

得 $2f(x)=2a+2\cos 2x-2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)+4a[\frac{1-\cos 2x}{2}]-4a[\frac{1-\cos 2(\frac{\pi}{4}+x)}{2}]$

$= 2a+2(\cos 2x+\sin 2x)-2a(\cos 2x+\sin 2x)$ ∴ $f(x)=a+\sqrt{2}(1-a)\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

（Ⅱ）当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$.

（1）∵ $|f(x)|\leqslant 2$，当 $a<1$ 时，$1=a+\sqrt{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)]\leqslant f(x)\leqslant a+\sqrt{2}(1-a)\leqslant 2$.

即 $1-\sqrt{2}\leqslant(1-\sqrt{2})a\leqslant 2-\sqrt{2}$. $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1$.

（2）∵ $|f(x)|\leqslant 2$，当 $a\geqslant 1$ 时，$-2\leqslant a+\sqrt{2}(1-a)\leqslant f(x)\leqslant 1$. 即 $1\leqslant a\leqslant 4+3\sqrt{2}$.

故满足条件 $a$ 的取值范围 $[-\sqrt{2}，4+3\sqrt{2}]$.

**4**.（1）$2b=2.b=1, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=2.e=\sqrt{3}$

椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$ （2 分）

（2）设 AB 的方程为 $y=kx+\sqrt{3}$

由$\begin{cases} y=kx+\sqrt{3} \\ \dfrac{y^2}{4}+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow (k^2+4)x^2+2\sqrt{3}kx-1=0 x_1+x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}k}{k^2+4}, x_1x_2=\dfrac{-1}{k^2+4}$

（4 分）

由已知

$$0=\frac{x_1x_2}{b^2}+\frac{y_1y_2}{a^2}=x_1x_2+\frac{1}{4}(kx_1+\sqrt{3})(kx_2+\sqrt{3})=(1+\frac{k^2}{4})x_1x_2+\frac{\sqrt{3}k}{4}(x_1+x_2)+\frac{3}{4}$$

$=\dfrac{k^2+4}{4}(-\dfrac{1}{k^2+4})+\dfrac{\sqrt{3}k}{4}\cdot\dfrac{-2\sqrt{3}k}{k^2+4}+\dfrac{3}{4}$,解得$k=\pm 2$ （7 分）

（3）当 $A$ 为顶点时，B 必为顶点.$S_{\triangle AOB}$=1 （8 分）

当 $A$，$B$ 不为顶点时，设 AB 的方程为 $y=kx+b$

$\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{y^2}{4}+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow (k^2+4)x^2+2kbx+b^2-4=0$得到$x_1+x_2=\dfrac{-2kb}{k^2+4}$

$$x_1x_2=\frac{b^2-4}{k^2+4}$$

$x_1x_2=\dfrac{y_1y_2}{4}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+\dfrac{(kx_1+b)(kx_2+b)}{4}=0$代入整理得$:2b^2+k^2=4$（11 分）

$$S=-\frac{1}{2}|b||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|b|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}|=\frac{|b|\sqrt{4k^2-4b^2+16}}{k^2+4}=\frac{\sqrt{4k^2}}{2|b|}=1$$

所以三角形的面积为定值.（12 分）

**5**（1）$a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)\cdot 10^n+\dfrac{2}{9}\cdot(10^n-1)$ ……………………………… (2 分 )

$=\dfrac{1}{9}(10^n-1)\cdot(10^n+2)=(\dfrac{10^n-1}{3})\cdot(\dfrac{10^n-1}{3}+1)$ ………………………………(4 分)

记：A $=\dfrac{10^n-1}{3}$ ， 则 A=$\underbrace{33\cdots\cdots3}_{n个}$为整数

∴ $a_n$ = A (A+1) ， 得证 ……………………………………………………………( 6 分) (2)

$\because a_n=\dfrac{1}{9}10^{2n}+\dfrac{1}{9}10^n-\dfrac{2}{9}$ ………………………………………………………… (8 分)

$$S_n=\frac{1}{9}(10^2+10^4+\cdots\cdots+10^{2n})+\frac{1}{9}(10+10^2+\cdots\cdots10^n)-\frac{2}{9}n$$

$=\dfrac{1}{891}(10^{2n+2}+11\cdot 10^{n+1}-198n-210)$ ………………………………………(12 分)

6、解：（Ⅰ）易知$a=\sqrt{5},b=2,c=1,\therefore F_1=(-1,0),F_2(1,0)$

设 P（$x$，y），则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-1-x,-y)\cdot(1-x,-y)=x^2+y^2-1$

$x^2+4-\frac{4}{5}x^2-1=\frac{1}{5}x^2+3$

$\because x\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$，

$\therefore$当$x=0$，即点 P 为椭圆短轴端点时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$有最小值 3；

当$x=\pm\sqrt{5}$，即点 P 为椭圆长轴端点时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$有最大值 4

（Ⅱ）假设存在满足条件的直线 $l$ 易知点 A（5，0）在椭圆的外部，当直线 $l$ 的斜率不存在时，直线 $l$ 与椭圆无交点，所在直线 $l$ 斜率存在，设为 k

直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-5)$

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=k(x-5)\end{cases}$，得$(5k^2+4)x^2-50k^2x+125k^2-20=0$

依题意$\Delta=20(16-80k^2)>0$，得$-\frac{\sqrt{5}}{5}<k<\frac{\sqrt{5}}{5}$

当$-\frac{\sqrt{5}}{5}<k<\frac{\sqrt{5}}{5}$时，设交点 C$(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，CD 的中点为 R$(x_0,y_0)$，

则$x_1+x_2=\frac{50k^2}{5k^2+4},x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{25k^2}{5k^2+4}$

$\therefore y_0=k(x_0-5)=k(\frac{25k^2}{5k^2+4}-5)=\frac{-20k}{5k^2+4}.$

又$|F_2C|=|F_2D|\Leftrightarrow F_2R\perp l\Leftrightarrow k\cdot k_{F_2R}=-1$

$$\therefore k\cdot k_{F_2R}=k\cdot\frac{0-(-\frac{20k}{5k^2+4})}{1-\frac{25k^2}{5k^2+4}}=\frac{20k^2}{4-20k^2}=-1$$

∴$20k^2=20k^2-4$，而 $20k^2=20k^2-4$ 不成立，　　所以不存在直线 $l$，使得$|F_2C|=|F_2D|$

综上所述，不存在直线 $l$，使得$|F_2C|=|F_2D|$

7、解：(1)依题意，曲线M是以点P为焦点，直线$l$为准线的抛物线，所以曲线M的方程为$y^2=4x$.

(2)(i)由题意得,直线AB的方程为:$y=-\sqrt{3}(x-1)$由$\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$消去 y 得:

$3x^2-10x+3=0$,解得$x_1=\frac{1}{3},x_2=3$.所以$A(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}),B(3,-2\sqrt{3}),|AB|=x_1+x_2+2=\frac{16}{3}$.

假设存在点C（－1，y），使△ABC为正三角形，则|BC|=|AB|且|AC|=|AB|，即

$$\begin{cases}(3+1)^2+(y+2\sqrt{3})^2=(\frac{16}{3})^2,\\(\frac{1}{3}+1)^2+(y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=(\frac{16}{3})^2\end{cases}$$ 相减得：$4^2+(y+2\sqrt{3})^2=(\frac{4}{3})^2+(y-\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$,解得$y=-\frac{14\sqrt{3}}{9}$(不符,舍)

因此，直线$l$上不存在点C，使得△ABC是正三角形.

（ii）解法一：设C（－1，$y$）使△ABC成钝角三角形，

由$\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-1)\\x=-1\end{cases}$ 得 $y=2\sqrt{3}$,此时A,B,C三点共线,故$y\neq 2\sqrt{3}$.

,

又$|AC|^2=(-1-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}y}{3}+y^2,|AB|^2=(\frac{16}{3})^2=\frac{256}{9}$,

当$|BC|^2>|AC|^2+|AB|^2$,即$28+4\sqrt{3}y+y^2>\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3}y+y^2+\frac{256}{9}$,即$y>\frac{2}{9}\sqrt{3}$时,

$\angle CAB$为钝角.

当$|AC|^2>|BC|^2+|AB|^2$,即$\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3}y+y^2>28+4\sqrt{3}y+y^2+\frac{256}{9}$

$y<-\frac{10}{3}\sqrt{3}$时$\angle CBA$为钝角.

又$|AB|^2>|AC|^2+|BC|^2$,即$\frac{256}{9}>\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}y}{3}+y^2+28+4\sqrt{3}y+y^2$

即：$y^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}y+\frac{4}{3}<0,(y+\frac{2}{\sqrt{3}})^2<0$

.

该不等式无解，所以∠ACB不可能为钝角.

因此，当△ABC为钝角三角形时，点C的纵坐标y的取值范围是:

$y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$或$y>\frac{2\sqrt{3}}{9}(y\neq 2\sqrt{3})$.

解法二： 以AB为直径的圆的方程为:

$(x-\frac{5}{3})^2+(y+\frac{2}{3}\sqrt{3})^2=(\frac{8}{3})^2$圆心$(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{3})$到直线$L:x=-1$ 的距离为$\frac{8}{3}$.

所以,以AB为直径的圆与直线L相切于点$G(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

当直线$l$上的C点与G重合时，∠ACB为直角，当C与G 点不重合，且A，B，C三点不共线时，∠ACB为锐角，即△ABC中∠ACB不可能是钝角. 因此，要使△ABC为钝角三角形，只可能是∠CAB或∠CBA为钝角.

过点A且与AB垂直的直线为：$y-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{3})$.令$x=-1$得$y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

过点B且与AB垂直的直线为：$y+2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，令$x=-1$得$y=-\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

又由$\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1) \\ x=-1 \end{cases}$解得$y=2\sqrt{3}$，所以，当点C的坐标为$(-1,2\sqrt{3})$时，

A，B，C三点共 线，不构成三角形.

因此，当△ABC为钝角三角形时，点C的纵坐标$y$的取值范围是：

$y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$或$y>\frac{2\sqrt{3}}{9}(y\neq 2\sqrt{3})$.

8、解：（1）令 a=b=0，则 $f(0)=[f(0)]^2$∵ $f(0)\neq 0$ ∴ $f(0)=1$

（2）令 a=x，b=-x 则 $f(0)=f(x)f(-x)$ ∴ $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

由已知 x>0 时，f(x)>1>0，当 x<0 时，-x>0，f(-x)>0

∴ $f(x)=\frac{1}{f(-x)}>0$ 又 x=0 时，f(0)=1>0

∴ 对任意 $x\in R$，f(x)>0

(3)任取 $x_2>x_1$，则 $f(x_2)>0$，$f(x_1)>0$，$x_2-x_1>0$

∴ $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2)\cdot f(-x_1)=f(x_2-x_1)>1$

∴ $f(x_2)>f(x_1)$ ∴ f(x)在 R 上是增函数

（4）$f(x)\cdot f(2x-x^2)=f[x+(2x-x^2)]=f(-x^2+3x)$ 又 1=f(0)，f(x)在 R 上递增

∴ 由 $f(3x-x^2)>f(0)$得：$x-x^2>0$ ∴ $0<x<3$

9、解：（1）由题意知 $f(1)=1+2b+c=0$，$\therefore c=-1-2b$

记 $g(x)=f(x)+x+b=x^2+(2b+1)x+b+c=x^2+(2b+1)x-b-1$

则 $\begin{cases} g(-3)=5-7b>0 \\ g(-2)=1-5b<0 \\ g(0)=-1-b<0 \\ g(1)=b+1>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5}<b<\frac{5}{7}$

即 $b\in(\frac{1}{5},\frac{5}{7})$

（2）令 u=$f(x)$。$\because 0<\frac{1}{5}<b<\frac{5}{7}<1$ $\therefore \log_b u$ 在（0，＋∞）是减函数

而$-1-c=2b>-b$，函数$f(x)=x^2+2bx+c$的对称轴为$x=-b$

$\therefore f(x)$在区间（$-1-c,1-c)$ 上为增函数，

从而$F(x)=\log_b f(x)$在$(-1-c,1-c)$ 上为减函数。

且 $f(x)$在区间（$-1-c,1-c)$ 上恒有 $f(x)>0$ ,只需 $f(-1-c)\ge 0$，

且$c=-2b-1(\frac{1}{5}<b<\frac{5}{7})$所以$-\frac{17}{7}<c\le -2$

10、解：（1）$\because 1+x_n^2\ge 2|x_n|\quad \therefore|\frac{2x_n}{1+x_n^2}|\le 1\quad 又x_1=\frac{1}{2}.$

$\therefore|\frac{2x_n}{1+x_n^2}|<1$

$f(x_1)=f(\frac{1}{2})=-1$

而 $f(x_{n+1})=f(\frac{2x_n}{1+x_n^2})=f(\frac{x_n+x_n}{1+x_nx_n})=f(x_n)+f(x_n)=2f(x_n).$

$\therefore\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=2\therefore\{f(x_n)\}是以-1为首项,以2为公比的等比数列,故f(x_n)=-2^{n-1}$

（2）由题设，有 $f(0)+f(0)=f(\frac{0+0}{1+0})=f(0),故f(0)=0$

又 $x\in(-1,1),有f(x)+f(-x)=f(\frac{x-x}{1-x^2})=f(0)=0,$

得 $f(-x)=-f(x),故知f(x)在(-1,1)$ 上为奇函数. 由

$$\frac{1}{k^2+3k+1}=\frac{1}{(k+1)(k+2)-1}=\frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{1-\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=\frac{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

得 $f(\frac{1}{k^2+3k+1})=f(\frac{1}{k+1})+f(-\frac{1}{k+2})=f(\frac{1}{k+1})-f(\frac{1}{k+2})$

于是 $\sum_{k=1}^{n}f(\frac{1}{k^2+3k+1})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{n+2})=-1-f(\frac{1}{n+2}).$

故$1+f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})+f(\frac{1}{n+2})=0.$

**11.**解：（1）设 C ( x , y )， $\because \overline{GA}+\overline{GB}=2\overline{GO}$ ,由①知 $\overline{GC}=-2\overline{GO}$ , ∴ G 为 △ABC 的重心 ，

∴ $G(\frac{x}{3},\frac{y}{3})$ ……………………………………………（2 分）

由②知 M 是△ABC 的外心，∴M 在 x 轴上。 由③知 M（$\frac{x}{3}$，0），

由$|\overrightarrow{MC}|$ = $|\overrightarrow{MA}|$ 得$\sqrt{(\frac{x}{3})^2+1}=\sqrt{(x-\frac{x}{3})^2+y^2}$ 化简整理得：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$（x≠0 ）…(6 分)

（2）F（$\sqrt{2}$，0 ）恰为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的右焦点

设 PQ 的斜率为 k≠0 且 k≠±$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则直线 PQ 的方程为 y = k ( x $-\sqrt{2}$ )

由$\begin{cases} y=k(x-\sqrt{2}) \\ x^2+3y^2-3=0 \end{cases}\Rightarrow(3k^2+1)x^2-6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0$

设 P($x_1$ , $y_1$) ，Q ($x_2$,$y_2$) 则 $x_1+x_2=\frac{6\sqrt{2}k^2}{3k^2+1}$ ， $x_1 \bullet x_2=\frac{6k^2-3}{3k^2+1}$ …… （8 分）

则$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{6\sqrt{2}k^2}{3k^2+1})^2-4\cdot\frac{6k^2-3}{3k^2+1}}=\frac{2\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+1}$

∵ RN⊥PQ,把 k 换成$-\frac{1}{k}$得 $|RN|=\frac{2\sqrt{3}(k^2+1)}{3+k^2}$ ………………………（ 10 分)

-7-

$\therefore S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|RN|=\frac{6(k^2+1)^2}{(3k^2+1)(k^2+3)}=2-\frac{8}{3(k^2+\frac{1}{k^2})+10}$

$\therefore 3(k^2+\frac{1}{k^2})+10=\frac{8}{2-S}$

$\because k^2+\frac{1}{k^2}\geqslant 2$ ， $\therefore\frac{8}{2-S}\geqslant 16$，$\therefore\frac{3}{2}\leqslant S<2$ ，(当 k = ±1 时取等号) ……（12 分）

又当 k 不存在或 k = 0 时 S = 2

综上可得 $\frac{3}{2}\leqslant S\leqslant 2$， $\therefore S_{max}=2$ ， $S_{min}=\frac{3}{2}$ ……………………………………（14 分）

12．解：⑴ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1$ 又∵ $\alpha$ 为锐角

$\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\therefore\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=1$ $f(x)=x^2+x$

⑵ $a_{n+1}=a_n^2+a_n$ $\because a_1=\frac{1}{2}$ $\therefore a_2,a_3,\cdots a_n$都大于 0 $\therefore a_n^2>0$ $\therefore a_{n+1}>a_n$

⑶ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n^2+a_n}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$ ，$\therefore\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$.

$\therefore\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}$

$\because a_2=(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$， $a_3=(\frac{3}{4})^2+\frac{3}{4}>1$ ， 又$\because n\ge 2$ $a_{n+1}>a_n$

$\therefore a_{n+1}\ge a_3>1$ ， $\therefore 1<2-\frac{1}{a_{n+1}}<2$，$\therefore 1<\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}<2$

**13** (本小题满分 14 分)解：（1）$\because a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ ……………2 分

故数列$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列。……3 分 $\therefore a_n+1=2^n$，$a_n=2^n-1$…4 分

（2）$\because 4^{b_1-1}4^{b_2-1}4^{b_3-1}\cdots 4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$，$\therefore 4^{(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)}=2^{nb_n}$ ……………5 分

$2(b_1+b_2+\cdots+b_n)-2n=nb_n$ ①

$$(1) f(x)=-a^2\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+c+\frac{1}{4}.$$

$2(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})-2(n+1)=(n+1)b_{n+1}$ ②

②—①得$2b_{n+1}-2=(n+1)b_{n+1}-nb_n$，即$nb_n-2=(n-1)b_{n+1}$③……………………8 分

$\therefore (n+1)b_{n+1}-2=nb_{n+2}$④

④—③得$2nb_{n+1}=nb_n+nb_{n-1}$，即$2b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$………9 分 所以数列$\{b_n\}$是等差数列

（3）$\because \frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n+1}-1}<\frac{1}{2^{n+1}-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{a_{n-1}}$ ………………………………11 分

设$S=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}}$，则$S<\frac{1}{a_2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n})=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{2}(S-\frac{1}{a_{n+1}})$

…………13 分

$S<\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{2}{3}$ ………………………………14 分

**14.** (本小题满分 16 分

（1）当$a=1$时，$g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+cx$，$g'(x)=-x^2+x+c$ ………………1 分

$\because g(x)$在（—1，1）上为单调递增函数，$\therefore g'(x)\ge 0$在（—1，1）上恒成立…………2 分

$\therefore -x^2+x+c\ge 0$在（—1，1）上恒成立…………3 分 $\therefore c\ge 2$ ………4 分

（2）设$g'(x)=f(x)$，则

$\because\ a\geqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore\ 0<\frac{1}{2a}\leqslant 1$，即 $\frac{1}{2a}\in(0,1]$.

当 $x=\frac{1}{2a}$ 时，$[f(x)]_{\max}=f\left(\frac{1}{2a}\right)=c+\frac{1}{4}$.

充分性：$\because\ c\leqslant\frac{3}{4}$，

$\therefore\ x\in[0,1]$ 时，$f(x)\leqslant c+\frac{1}{4}\leqslant 1$.

$\therefore\ f(x)\leqslant 1(x\in[0,1])$.

必要性：$\because\ x\in[0,1]$ 时，$f(x)\leqslant 1$，而 $\frac{1}{2a}\in(0,1]$，

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2a}\right)=c+\frac{1}{4}\leqslant 1$.

$\therefore\ c\leqslant\frac{3}{4}$.

(2)二次函数 $f(x)$ 的图象开口向下，对称轴方程为 $x=\frac{1}{2a}$.

$\because\ a\geqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore\ \frac{1}{2a}\in(0,1]\subsetneqq[-1,1]$.

$$\therefore\ \begin{cases}|\alpha|\leqslant 1,\\|\beta|\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=0 \text{ 的两根 } \alpha,\beta \text{ 在 } [-1,1] \text{ 内}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ \frac{1}{2a}\in[-1,1],\\ f(1)\leqslant 0,\\ f(-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4c+1\geqslant 0,\\ f(1)\leqslant 0,\\ f(-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}c\geqslant-\frac{1}{4},\\ c\leqslant a^2-a,\\ c\leqslant a^2+a\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}c\leqslant a^2-a.$$

$\therefore\ |\alpha|\leqslant 1$ 且 $|\beta|\leqslant 1$ 的充要条件是 $-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant a^2-a$.

**15**、① $a_1=1$；③ $a=\frac{4}{3}$

16、解：(1)由 $f(m\cdot n)=[f(m)]^n$ 得：$f(0)=f(0\times 0)=[f(0)]^0$

$\because$ 函数 f(x)的图象均在 x 轴的上方，$\therefore f(0)>0$，$\therefore f(0)=1$ ……3 分

$\because f(2)=f(1\times 2)=[f(1)]^2=4$，又 $f(x)>0$ $\therefore f(1)=2, f(-1)=f(1)=2$ ……3 分

(2)

$$\left[f\left(\frac{kx+2}{2\sqrt{x^2+4}}\right)\right]^2\geq 2\Leftrightarrow f\left(\frac{kx+2}{2\sqrt{x^2+4}}\ 2\right)\geq 2\Leftrightarrow f\left(\frac{kx+2}{\sqrt{x^2+4}}\right)\geq f(\pm 1)\Leftrightarrow f\left(\frac{|kx+2|}{\sqrt{x^2+4}}\right)\geq f(1)$$

又当 $x\geq 0$ 时，其导函数 $f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore y=f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为单调递增函数

$$\therefore\frac{|kx+2|}{\sqrt{x^2+4}}\geq 1\Leftrightarrow|kx+2|\geq\sqrt{x^2+4}\Leftrightarrow(k^2-1)x^2+4kx\geq 0$$

①当 $k=0$ 时，$x\in\{0\}$；

②当 $-1<k<0$ 时，$x\left(x-\frac{4k}{1-k^2}\right)\le 0\Leftrightarrow \frac{4k}{1-k^2}\le x\le 0$，$\therefore x\in\left[\frac{4k}{1-k^2},0\right]$；

③当 $0<k<1$ 时，$x\left(x-\frac{4k}{1-k^2}\right)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4k}{1-k^2}$，$\therefore x\in\left[0,\frac{4k}{1-k^2}\right]$

综上所述：当 $k=0$ 时，$x\in\{0\}$；当 $-1<k<0$ 时，$x\in\left[\frac{4k}{1-k^2},0\right]$；

当 $0<k<1$ 时，$x\in\left[0,\frac{4k}{1-k^2}\right]$。

17、解：（I）$f_1(x),f_2(x)$ 是“保三角形函数”，$f_3(x)$ 不是“保三角形函数”． 1 分

任给三角形，设它的三边长分别为 $a,b,c$，则 $a+b>c$，不妨假设 $a\le c,b\le c$，

由于 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}>\sqrt{c}>0$，所以 $f_1(x),f_2(x)$ 是“保三角形函数”． 3 分

对于 $f_3(x)$，3，3，5 可作为一个三角形的三边长，但 $3^2+3^2<5^2$，所以不存在三角形以 $3^2,3^2,5^2$ 为三边长，故 $f_3(x)$ 不是“保三角形函数”． 4 分

（II）设 $T>0$ 为 $g(x)$ 的一个周期，由于其值域为 $(0,+\infty)$，所以，存在 $n>m>0$，使得 $g(m)=1,g(n)=2$，

取正整数 $\lambda>\frac{n-m}{T}$，可知 $\lambda T+m,\ \lambda T+m,\ n$ 这三个数可作为一个三角形的三边长，但 $g(\lambda T+m)=1$，$g(\lambda T+m)=1,g(n)=2$ 不能作为任何一个三角形的三边长．故 $g(x)$ 不是“保三角形函数”. 8 分

（III）$A$ 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$． 9 分

一方面，若 $A>\frac{5\pi}{6}$，下证 $F(x)$ 不是“保三角形函数”.

取 $\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\in(0,A)$，显然这三个数可作为一个三角形的三边长，但

$\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 不能作为任何一个三角形的三边长，故 $F(x)$ 不是“保三角形函数”.

另一方面，以下证明 $A=\frac{5\pi}{6}$ 时，$F(x)$ 是“保三角形函数”.

对任意三角形的三边 $a,b,c$，若 $a,b,c\in(0,\frac{5\pi}{6})$，则分类讨论如下：

（1）$a+b+c\geqslant 2\pi$，

此时 $a\geqslant 2\pi-b-c>2\pi-\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，同理，$b,c>\frac{\pi}{3}$，

$\therefore a,b,c\in(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$，故 $\sin a,\sin b,\sin c\in(\frac{1}{2},1]$，$\sin a+\sin b>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\geqslant\sin c$．

同理可证其余两式.

$\therefore\sin a,\sin b,\sin c$ 可作为某个三角形的三边长.

（2）$a+b+c<2\pi$

此时，$\frac{a+b}{2}+\frac{c}{2}<\pi$，可得如下两种情况：

$\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$时，由于 $a+b>c$，所以，$0<\frac{c}{2}<\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

由 $\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调性可得 $0<\sin\frac{c}{2}<\sin\frac{a+b}{2}\leqslant 1$；

$\frac{a+b}{2}>\frac{\pi}{2}$时，$0<\frac{c}{2}<\pi-\frac{a+b}{2}<\frac{\pi}{2}$，

同样，由 $\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性可得 $0<\sin\frac{c}{2}<\sin\frac{a+b}{2}<1$；

总之，$0<\sin\frac{c}{2}<\sin\frac{a+b}{2}\leqslant 1$.

又由 $|a-b|<c<\frac{5\pi}{6}$ 及余弦函数在 $(0,\pi)$ 上单调递减，得

$$\cos\frac{a-b}{2}=\cos\frac{|a-b|}{2}>\cos\frac{c}{2}>\cos\frac{5\pi}{12}>0,$$

$$\therefore\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}>2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin c.$$

同理可证其余两式，所以 $\sin a,\sin b,\sin c$ 也是某个三角形的三边长．故 $A=\frac{5\pi}{6}$ 时，$F(x)$ 是“保三角形函数”.

综上，$A$ 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$.

18、解：（Ⅰ）$\because S_1=\frac{a}{a-1}(a_1-1)$，$\therefore a_1=a$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a}{a-1}a_n-\frac{a}{a-1}a_{n-1}$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$，即 $\{a_n\}$ 是等比数列．$\therefore a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$；　　　　　　………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=\frac{2\cdot\frac{a}{a-1}(a^n-1)}{a^n}+1=\frac{(3a-1)a^n-2a}{a^n(a-1)}$，若 $\{b_n\}$ 为等比数列，

则有 $b_2{}^2 = b_1 b_3$, 而 $b_1 = 3, b_2 = \dfrac{3a+2}{a}, b_3 = \dfrac{3a^2+2a+2}{a^2}$,

故 $(\dfrac{3a+2}{a})^2 = 3 \cdot \dfrac{3a^2+2a+2}{a^2}$，解得 $a = \dfrac{1}{3}$，　　……………………………………7 分

再将 $a = \dfrac{1}{3}$ 代入得 $b_n = 3^n$ 成立，　　所以 $a = \dfrac{1}{3}$．　　…………8 分

（III）证明：由（Ⅱ）知 $a_n = (\dfrac{1}{3})^n$，所以 $c_n = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{3})^n} + \dfrac{1}{1-(\frac{1}{3})^{n+1}} = \dfrac{3^n}{3^n+1} + \dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}-1}$

$= \dfrac{3^n+1-1}{3^n+1} + \dfrac{3^{n+1}-1+1}{3^{n+1}-1} = 1 - \dfrac{1}{3^n+1} + 1 + \dfrac{1}{3^{n+1}-1} = 2 - (\dfrac{1}{3^n+1} - \dfrac{1}{3^{n+1}-1})$，　………… 9 分

由 $\dfrac{1}{3^n+1} < \dfrac{1}{3^n}$，$\dfrac{1}{3^{n+1}-1} > \dfrac{1}{3^{n+1}}$ 得 $\dfrac{1}{3^n+1} - \dfrac{1}{3^{n+1}-1} < \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$,

所以 $c_n = 2 - (\dfrac{1}{3^n+1} - \dfrac{3}{3^{n+1}-1}) > 2 - (\dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{3^{n+1}})$，　　…………………… 12 分

从而 $T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n > [2-(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^2})] + [2-(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3})] + \cdots [2-(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{n+1}})]$

$= 2n - [(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^2}) + (\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}) + \cdots + (\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{n+1}})] = 2n - (\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^{n+1}}) > 2n - \dfrac{1}{3}$．

即 $T_n > 2n - \dfrac{1}{3}$．　　……………………14 分

19、解：（I）$a_1 = 2$，$a_2 = 2 + c$，$a_3 = 2 + 3c$，因为 $a_1$，$a_2$，$a_3$ 成等比数列，

所以 $(2+c)^2 = 2(2+3c)$，解得 $c = 0$ 或 $c = 2$．

当 $c = 0$ 时，$a_1 = a_2 = a_3$，不符合题意舍去，故 $c = 2$．……4 分（文 6 分）

（II）当 $n \geqslant 2$ 时，由于 $a_2 - a_1 = c$，$a_3 - a_2 = 2c$，……

$a_n - a_{n-1} = (n-1)c$，所以 $a_n - a_1 = [1+2+\cdots+(n-1)]c = \dfrac{n(n-1)}{2}c$。

又 $a_1 = 2$，$c = 2$，故 $a_n = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2 (n = 2,3,\cdots)$．当 n=1 时，上式也成立，所以

$a_n = n^2 - n + 2 (n = 1,2,\cdots)$……8 分

（III）$b_n=3^{2n-2}-3^{n-1}+2$, ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ =9. ……12 分

20、解：（1）$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{NQ} \\ \overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Q 为 PN 的中点且 GQ⊥PN

$\Rightarrow$ GQ 为 PN 的中垂线 $\Rightarrow$ |PG|=|GN|

$\therefore$ |GN|+|GM|=|MP|=6，故 G 点的轨迹是以 M、N 为焦点的椭圆，其长半轴长 $a=3$，半焦距 $c=\sqrt{5}$，$\therefore$ 短半轴长 b=2，$\therefore$ 点 G 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ………5 分

（2）因为 $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，所以四边形 OASB 为平行四边形

若存在 $l$ 使得 $|\overrightarrow{OS}|=|\overrightarrow{AB}|$，则四边形 OASB 为矩形 $\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

若 $l$ 的斜率不存在，直线 $l$ 的方程为 $x$=2，由 $\begin{cases} x=2 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{16}{9}>0$，与 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 矛盾，故 $l$ 的斜率存在. ………7 分

设 $l$ 的方程为 $y=k(x-2), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow (9k^2+4)x^2-36k^2x+36(k^2-1)=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{36k^2}{9k^2+4}, x_1x_2=\frac{36(k^2-1)}{9k^2+4}$ ①

$y_1y_2=[k(x_1-2)][k(x_2-2)]$

$=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-\frac{20k^2}{9k^2+4}$ ② ……………9 分

把①、②代入 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 得 $k=\pm\frac{3}{2}$

$\therefore$ 存在直线 $l: 3x-2y-6=0$ 或 $3x+2y-6=0$ 使得四边形 OASB 的对角线相等.

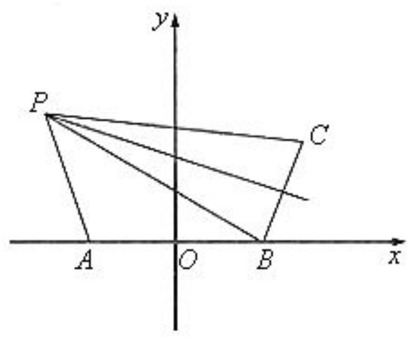
21、 解：（1）以 AB 中点为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $A(-3，0)$，$B(3，0)$，$C(5，2\sqrt{3})$ 则 $|AC|=\sqrt{(5+3)^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{19}\,km$

即 A、C 两个救援中心的距离为 $2\sqrt{19}\,km$

（2）$\because |PC|=|PB|$，所以 P 在 BC 线段的垂直平分线上

又 $\because |PB|-|PA|=4$，所以 P 在以 A、B 为焦点的双曲线的左支上，且 $|AB|=6$

$\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\ (x<0)$



BC的垂直平分线的方程为 $x+\sqrt{3}y-7=0$

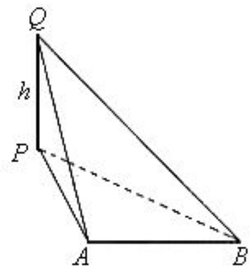
联立两方程解得：$x=-8$

$\therefore P\left(-8，5\sqrt{3}\right)$，$k_{PA}=\tan\angle PAB=-\sqrt{3}$

∴∠PAB＝120° 所以P点在A点的北偏西30°处

（3）如图，设 $|PQ|=h$，$|PB|=x$，$|PA|=y$ $\because |QB|-|QA|=\sqrt{x^2+h^2}-\sqrt{y^2+h^2}$

$$=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2}}=(x-y)\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2}}$$




又 $\because \frac{x+y}{\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2}}<1$

$\therefore |QB|-|QA|<|PB|-|PA| \therefore \frac{|QB|}{1}-\frac{|QA|}{1}<\frac{|PB|}{1}-\frac{|PA|}{1}$

即A、B收到信号的时间差变小

**22**、解：（Ⅰ）三个函数的最小值依次为 $1$，$\sqrt{1+t}$，$\sqrt{1-t}$，…………………… …3分

由 $f(1)=0$，得 $c=-a-b-1$

$\therefore$ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=x^3+ax^2+bx-(a+b+1)=(x-1)[x^2+(a+1)x+(a+b+1)]$，

故方程 $x^2+(a+1)x+(a+b+1)=0$ 的两根是 $\sqrt{1-t}$，$\sqrt{1+t}$．

故 $\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}=-(a+1)$，$\sqrt{1-t}\cdot\sqrt{1+t}=a+b+1$．……………………4分

$(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})^2=(a+1)^2$，即 $2+2(a+b+1)=(a+1)^2$

$\therefore$ $a^2=2b+3$． ……………………………………………………5分

（Ⅱ）①依题意 $x_1,x_2$ 是方程 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 的根，故有 $x_1+x_2=-\frac{2a}{3}$，$x_1x_2=\frac{b}{3}$，

且 $\triangle=(2a)^2-12b>0$，得 $b<3$．

由 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{a^2-3b}}{3}=\frac{2\sqrt{3-b}}{3}$ ……………………7分

$\frac{2\sqrt{3-b}}{3}=\frac{2}{3}$；得，$b=2$，$a^2=2b+3=7$．

由（Ⅰ）知 $\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}=-(a+1)>0$，故 $a<-1$，

∴ $a=-\sqrt{7}$，$c=-(a+b+1)=\sqrt{7}-3$

∴ $f(x)=x^3-\sqrt{7}x^2+2x+\sqrt{7}-3$．…………………………………………9 分

②$|M-N|=|f(x_1)-f(x_2)|=|(x_1^3-x_2^3)+a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)|$

$=|x_1-x_2|\cdot|(x_1+x_2)^2-x_1x_2+a(x_1+x_2)+b|=\dfrac{2\sqrt{3-b}}{3}|(-\dfrac{2a}{3})^2-\dfrac{b}{3}+a\cdot(-\dfrac{2a}{3})+b|$

$=\dfrac{4}{27}(3-b)^{\frac{3}{2}}$（或$\dfrac{4}{27}(\dfrac{9-a^2}{2})^{\frac{3}{2}}$）．…………………………………………11 分

由（Ⅰ）$(a+1)^2=(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})^2=2+2\sqrt{1-t^2}$

∵ $0<t<1$，∴ $2<(a+1)^2<4$，

又$a<-1$，∴ $-2<a+1<-\sqrt{2}$，

$-3<a<-\sqrt{2}-1$，$3+2\sqrt{2}<a^2<9$（或$\sqrt{2}<b<3$）…………………13 分

∴ $0<|M-N|<\dfrac{4}{27}(3-\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$．……………………………………15 分

**23.**（本小题满分 12 分）

解：（I）由$x^2=4y$得$y=\dfrac{1}{4}x^2$，$\therefore y'=\dfrac{1}{2}x.$ ∴直线 $l$ 的斜率为 $y'|_{x=2}=1$，………1 分

故 $l$ 的方程为 $y=x-1$，∴点 A 坐标为（1，0）………………………………………… 2 分

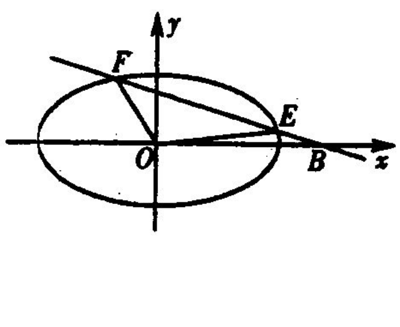
设$M(x,y)$　　则$\overrightarrow{AB}=(1,0),\overrightarrow{BM}=(x-2,y),\overrightarrow{AM}=(x-1,y)$，

由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\sqrt{2}|\overrightarrow{AM}|=0$得 $(x-2)+y\cdot0+\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0.$

整理，得$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1.$……4 分

∴点 $M$ 的轨迹为以原点为中心，焦点在 $x$ 轴上，长轴长为$2\sqrt{2}$，短轴长为 2 的椭圆 ……… 5 分

（II）如图，由题意知直线 $l$ 的斜率存在且不为零，设 $l$ 方程为 y=$k(x-2)(k\neq0)$①




将①代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，整理，得

$(2k^2+1)x^2-8k^2\cdot x+(8k^2-2)=0$，

由△>0 得 $0<k^2<\dfrac{1}{2}$．　设 $E(x_1，y_1)$，$F(x_2，y_2)$

则$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{2k^2+1}, \\ x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}. \end{cases}$ ②……………………………………………………7 分

令$\lambda=\dfrac{S_{\Delta OBE}}{S_{\Delta OBF}}$,则$\lambda=\dfrac{|BE|}{|BF|}$，由此可得$\overrightarrow{BE}=\lambda\cdot\overrightarrow{BF},\lambda=\dfrac{x_1-2}{x_2-2}$,且$0<\lambda<1$.

由②知$(x_1-2)+(x_2-2)=\dfrac{-4}{2k^2+1}$,

$(x_1-2)\cdot(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=\dfrac{2}{2k^2+1}$.

$\therefore\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}=\dfrac{2k^2+1}{8}$,即$k^2=\dfrac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{1}{2}$………………10分

$\because 0<k^2<\dfrac{1}{2},\therefore 0<\dfrac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$, 解得$3-2\sqrt{2}<\lambda<3+2\sqrt{2}$.

又$\because 0<\lambda<1$,

$\therefore 3-2\sqrt{2}<\lambda<1$.∴△OBE 与△OBF 面积之比的取值范围是（$3-2\sqrt{2}$，1）.……12 分

**24.** （本小题满分 14 分）解：（I）由题意$g(x)=px-\dfrac{q}{x}-2\ln x$,

又$g(e)=pe-\dfrac{q}{e}-2,\therefore pe-\dfrac{q}{e}-2=qe-\dfrac{q}{e}-2$,

$\therefore(p-q)e+(p-q)\dfrac{1}{e}=0,\therefore(p-q)(e+\dfrac{1}{e})=0$,

而$e+\dfrac{1}{e}\neq 0,\therefore p=q$.…………………………………3分

（II）由（I）知：$g(x)=px-\dfrac{p}{x}-2\ln x$，$g'(x)=p+\dfrac{p}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{px^2-2x+p}{x^2}$,

令 $h(x)=px^2-2x+p$.要使 $g(x)$在（0，+∞）为单调函数，只需 $h(x)$在（0，+∞）满足：$h(x)\geqslant 0$ 或 $h(x)\leqslant 0$ 恒成立.………………………………4 分

① $p=0$时,$h(x)=-2x$，$\because x>0,\therefore h(x)<0,\therefore g'(x)=-\dfrac{2x}{x^2}<0$,

∴$g(x)$在（0，+∞）单调递减，∴$p=0$ 适合题意.………………………5 分

②当 $p>0$ 时，$h(x)=px^2-2x+p$ 图象为开口向上抛物线，

称轴为 $x=\dfrac{1}{p}\in$（0，+∞）.∴$h(x)_{min}=p-\dfrac{1}{p}$.只需 $p-\dfrac{1}{p}\geqslant 0$，即 $p\geqslant 1$ 时 $h(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$，

∴$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，∴$p\geqslant 1$ 适合题意.………………………7 分

③当 $p<0$ 时，$h(x)=px^2-2x+p$ 图象为开口向下的抛物线，其对称轴为 $x=\dfrac{1}{p}\notin$（0，+∞），

只需 $h(0)\leqslant 0$，即 $p\leqslant 0$ 时 $h(0)\leqslant$（0,+ ∞)恒成立.

∴g′($x$)<0 ，∴g($x$)在（0,+ ∞）单调递减，∴p<0 适合题意.
综上①②③可得，p≥1 或 p≤0.……………………………………9 分
（III）证明：①即证：ln$x$－$x$+1≤0 ($x$>0)，
设$k(x)=\ln x-x+1$,则$k'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.
当 $x$∈（0，1）时，$k'$ ($x$)>0，∴$k$($x$)为单调递增函数；
当 $x$∈（1，∞）时，$k'$ ($x$)<0，∴$k$($x$)为单调递减函数；
∴$x$=1 为 k($x$)的极大值点，∴k($x$)≤k(1)=0.
即 ln$x$－$x$+1≤0，∴ln$x$≤$x$－1.………………………………11 分

.

②由①知 ln$x$≤$x$－1,又 $x$>0， $\therefore\frac{\ln x}{x}\le\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$

$\because n\in N^*,n\ge 2$时,令$x=n^2$,得$\frac{\ln n^2}{n^2}\le 1-\frac{1}{n^2}$.

$\therefore\frac{\ln n}{n^2}\le\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n^2})$,

$$\therefore\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\ldots+\frac{\ln n}{2^2}\le\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\ldots+1-\frac{1}{n^2})$$

$$=\frac{1}{2}[(n-1)]-(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2})]<\frac{1}{2}[(n-1)-(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)})]$$

$$=\frac{1}{2}[n-1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\frac{1}{2}[n-1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})]=\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$$

∴结论成立.……………………………………………………………………14 分

**25．**解：（Ⅰ）$\because S_1=\frac{a-1}{a}(a_1-1)$， $\therefore a_1=0$,

当$n\ge 2$时， $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a}{a-1}a_n-\frac{a}{a-1}a_{n-1}$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$，即$\{a_n\}$是等比数列． $\therefore a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$； ………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $b_n=\frac{2\cdot\frac{a}{a-1}(a^n-1)}{a^n}+1=\frac{(3a-1)a^n-2a}{a^n(a-1)}$，若$\{b_n\}$为等比数列，

则有${b_2}^2=b_1b_3$,而$b_1=3,b_2=\frac{3a+2}{a},b_3=\frac{3a^2+2a+2}{a^2}$,

故$(\frac{3a+2}{a})^2=3\cdot\frac{3a^2+2a+2}{a^2}$，解得$a=\frac{1}{3}$，再将$a=\frac{1}{3}$代入得$b_n=3^n$成立， 所以$a=\frac{1}{3}$．

（III）证明：由（Ⅱ）知$a_n=(\frac{1}{3})^n$，所以$c_n=\frac{1}{1+(\frac{1}{3})^n}+\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}=\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-1}$

$$=\frac{3^n+1-1}{3^n+1}+\frac{3^{n+1}-1+1}{3^{n+1}-1}=1-\frac{1}{3^n+1}+1+\frac{1}{3^{n+1}-1}=2-(\frac{2}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$$，

由$\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^n}$，$\frac{1}{3^{n+1}-1}>\frac{1}{3^{n+1}}$得$\frac{1}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}<\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}}$，

所以$c_n=2-(\frac{1}{3^n-1}-\frac{3}{3^{n+1}-1})>2-(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}})$，

从而$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>[2-(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2})]+[2-(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3})]+\cdots[2-(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}})]$

$=2n-[(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}})]=2n-(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}})>2n-\frac{1}{3}$.

即$T_n>2n-\frac{1}{3}$. ……………………………14 分

26、解：（Ⅰ）设$\frac{x^2+a}{bx-c}=x\Rightarrow(1-b)x^2+cx+a=0(b\neq1)$

$\Rightarrow\begin{cases}2+0=-\dfrac{c}{1-b}\\2\times0=\dfrac{a}{1-b}\end{cases}$　　$\therefore\begin{cases}a=0\\b=1+\dfrac{c}{2}\end{cases}$　　$\therefore f(x)=\dfrac{x^2}{(1+\frac{c}{2})x-c}$

由$f(-2)=\frac{-2}{1+c}<-\frac{1}{2}\Rightarrow-1<c<3$

又$\because b,c\in N^*$　　$\therefore c=2,b=2$

$\therefore f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}(x\neq1)$　　……………………… 3 分

于是$f'(x)=\frac{2x\ 2(x-1)-x^2\ 2}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2(x-1)^2}$

由$f'(x)>0$得$x<0$或$x>2$；　　由$f'(x)<0$得$0<x<1$或$1<x<2$

故函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$，

单调减区间为$(0,1)$和$(1,2)$　　　　………………………4 分

（Ⅱ）由已知可得$2S_n=a_n-a_n{}^2$，　　　当$n\geq2$时，$2S_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-1}{}^2$

两式相减得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}+1)=0$

$\therefore a_n=-a_{n-1}$或$a_n-a_{n-1}=-1$

当$n=1$时，$2a_1=a_1-a_1{}^2\Rightarrow a_1=-1$，若$a_n=-a_{n-1}$，则$a_2=1$这与$a_n\neq1$矛盾

$\therefore a_n-a_{n-1}=-1$　　$\therefore a_n=-n$　　　………………………6 分

于是，待证不等式即为$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$.

为此，我们考虑证明不等式$\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x},x>0$

令$1+\frac{1}{x}=t,x>0,$则$t>1$，$x=\frac{1}{t-1}$

再令$g(t)=t-1-\ln t$，$g'(t)=1-\frac{1}{t}$　　　由$t\in(1,+\infty)$知$g'(t)>0$

$\therefore$ 当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g(t)$ 单调递增　　$\therefore g(t)>g(1)=0$　　于是 $t-1>\ln t$

即 $\frac{1}{x}>\ln\frac{x+1}{x},x>0$　　①

令 $h(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$　　由 $t\in(1,+\infty)$ 知 $h'(t)>0$

$\therefore$ 当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h(t)$ 单调递增　　$\therefore h(t)>h(1)=0$　　于是 $\ln t>1-\frac{1}{t}$

即 $\ln\frac{x+1}{x}>\frac{1}{x+1},x>0$　　②

由①、②可知 $\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x},x>0$　　……………………10 分

所以，$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$，即 $1-\frac{1}{a_n}<\ln\frac{n+1}{n}<-\frac{1}{a_n}$　　……11 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $b_n=\frac{1}{n}$　　则 $T_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

在 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$ 中令 $n=1,2,3,\cdots,2007$，并将各式相加得

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{2008}{2007}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}$

即 $T_{2008}-1<\ln 2008<T_{2007}$

27、解：（1）∵定义域 $\{x|\, x\neq k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$ 关于原点对称，

又 $f(-x)=f[(a-x)-a]=\frac{f(a-x)\cdot f(a)+1}{f(a)-f(a-x)}=\frac{1+f(a-x)}{1-f(a-x)}=\frac{1+\frac{f(a)\cdot f(x)+1}{f(x)-f(a)}}{1-\frac{f(a)\cdot f(x)+1}{f(x)-f(a)}}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{f(x)-1}}{1-\frac{1+f(x)}{f(x)-1}}=\frac{2f(x)}{-2}$

$=-f(x)$，对于定义域内的每个 $x$ 值都成立

$\therefore f(x)$ 为奇函数------------------------------------------------------------------------------------（4分）

（2）易证：$f(x+4a)=f(x)$，周期为 $4a$．------------------------------------------（8分）

（3）$f(2a)=f(a+a)=f[a-(-a)]=\frac{f(a)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(a)}=\frac{1-f^2(a)}{-2f(a)}=0$，

$f(3a)=f(2a+a)=f[2a-(-a)]=\frac{f(2a)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(2a)}=\frac{1}{-f(a)}=-1$．

先证明 $f(x)$ 在 $[2a，3a]$ 上单调递减为此，必须证明 $x\in(2a，3a)$ 时，$f(x)<0$，

设 $2a<x<3a$，则 $0<x-2a<a$，

$\therefore f(x-2a)=\frac{f(2a)\cdot f(x)+1}{f(2a)-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}>0$，$\therefore f(x)<0$---------------------（10分）

设 $2a<x_1<x_2<3a$，

则 $0<x_2-x_1<a$，$\therefore f(x_1)<0$　$f(x_2)<0$　$f(x_2-x_1)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2-x_1)}>0$，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

∴ $f(x)$ 在$[2a，3a]$上单调递减--------------------------------------------------（12分）

∴ $f(x)$ 在$[2a，3a]$上的最大值为 $f$（$2a=0$，最小值为 $f(3a)=-1$

28、解：(Ⅰ)设点 M(x,y)，由 $2\overrightarrow{PM}+3\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$ 得 P(0，$-\frac{y}{2}$)，Q($\frac{x}{3},0$).

由 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PM}=0$, 得(3，$-\frac{y}{2}$)•($x$，$\frac{3y}{2}$)＝0,即 $y^2=4x$

又点 Q 在 x 轴的正半轴上，∴ $x>0$ 故点 M 的轨迹 C 的方程是 $y^2=4x(x>0)$.⋯　　⋯6 分

（Ⅱ）解法一：由题意可知 N 为抛物线 C:y²＝4x 的焦点，且 A、B 为过焦点 N 的直线与抛物线 C 的两个交点。

当直线 AB 斜率不存在时，得 A(1,2)，B(1,-2)，|AB|$=4<\frac{16}{3}$，不合题意；⋯⋯⋯7 分

当直线 AB 斜率存在且不为 0 时，设 $l_{AB}$：$y=k(x-1)$，代入 $y^2=4x$ 得 $k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$

则|AB|$=x_1+x_2+2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=4+\frac{4}{k^2}=\frac{16}{3}$,解得 $k^2=3$　　⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯10 分

代入原方程得 $3x^2-10x+3=0$，由于 $x_1>1$，所以 $x_1=3,x_2=\frac{1}{3}$,

由 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AN}$，得　$\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_N-x_1}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3-1}=\frac{4}{3}$.　　⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯13 分

解法二：由题设条件得

$$\begin{cases} y_1^2=4x_1 & (1)\\ y_2^2=4x_2 & (2)\\ x_2-x_1=\lambda(1-x_1) & (3)\\ y_2-y_1=-\lambda y_1 & (4)\\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{16}{3} & (5)\end{cases}$$

由（3）、（4）得 $\begin{cases} x_2=x_1+\lambda(1-x_1)\\ y_2=(1-\lambda)y_1\end{cases}$

代入（2）得 $(1-\lambda)^2y_1^2=4x_1+4\lambda(1-x_1)$

再把 (1) 代入上式并化简得

$(\lambda-1)x_1=1$　(6)　⋯⋯9分

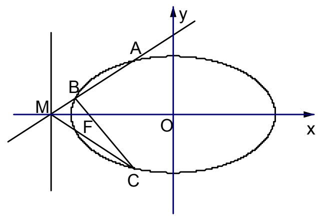
同样把（3）、（4）代入（5）并结合 (1)

化简后可得　$(1+x_1)\lambda=\frac{16}{3}$　(7)　⋯⋯11分

由（6）、（7）解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{3}\\ x_1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=4\\ x_1=\frac{1}{3}\end{cases}$，又 $x_1>1$，故 $\lambda=\frac{4}{3}$.

29、解：（Ⅰ）设椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由题意可知

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\\ 2\cdot\frac{a^2}{c}=6,\end{cases}$$ 解得 $a=\sqrt{6}$，$c=2$，$b=\sqrt{2}$，




所以椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$．……………………………………………4 分

（Ⅱ）解法 1：因为左准线方程为 $x=-\frac{a^2}{c}=-3$，所以点 $M$ 坐标为 $(-3,0)$.于是可设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+3)$．

$$\begin{cases}y=k(x+3),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$$ 得 $(1+3k^2)x^2+18k^2x+27k^2-6=0$．

由直线 $l$ 与椭圆 W 交于 $A$、$B$ 两点，可知

$\Delta=(18k^2)^2-4(1+3k^2)(27k^2-6)>0$，解得 $k^2<\frac{2}{3}$．

设点 $A$，$B$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{-18k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{1+3k^2}$，$y_1=k(x_1+3)$，$y_2=k(x_2+3)$．

因为 $F(-2,0)$，$C(x_1,-y_1)$，

所以 $\overrightarrow{FC}=(x_1+2,-y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2+2,y_2)$．

又因为 $(x_1+2)y_2-(x_2+2)(-y_1)=(x_1+2)k(x_2+3)+(x_2+2)k(x_1+3)$

$=k[2x_1x_2+5(x_1+x_2)+12]=k[\frac{54k^2-12}{1+3k^2}+\frac{-90k^2}{1+3k^2}+12]$

$=\frac{k(54k^2-12-90k^2+12+36k^2)}{1+3k^2}=0$，　　　所以 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FB}$．…………10 分

解法 2：因为左准线方程为 $x=-\frac{a^2}{c}=-3$，所以点 $M$ 坐标为 $(-3,0)$．

于是可设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+3)$，点 $A$，$B$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，

则点$C$的坐标为$(x_1,-y_1)$，$y_1=k(x_1+3)$，$y_2=k(x_2+3)$.

由椭圆的第二定义可得

$$\frac{|FB|}{|FC|}=\frac{x_2+3}{x_1+3}=\frac{|y_2|}{|y_1|},$$

所以$B$，$F$，$C$三点共线，即$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FB}$. ……………………………………10 分

(III)由题意知

$$S=\frac{1}{2}|MF||y_1|+\frac{1}{2}|MF||y_2|=\frac{1}{2}|MF|\cdot|y_1+y_2|=\frac{1}{2}|k(x_1+x_2)+6k|$$

$$=\frac{3|k|}{1+3k^2}=\frac{3}{\frac{1}{|k|}+3|k|}\le\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$，当且仅当$k^2=\frac{1}{3}$时“=”成立，

所以$\Delta MBC$面积$S$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30、解：（I）将$P$（1，－1）代入抛物线$C$的方程$y=ax^2$得$a$=－1，

∴抛物线$C$的方程为$y=-x^2$，即$x^2=-y$.

焦点坐标为$F$（0，$-\frac{1}{4}$）.……………………………………4 分

（II）设直线$PA$的方程为$y+1=k_1(x-1)$，

联立方程$\begin{cases}y+1=k_1(x-1),\\ y=-x^2.\end{cases}$消去 y 得$x^2+k_1x-k_1-1=0,$

则$1\cdot x_1=-k_1-1,$即$x_1=-k_1-1.$

由$\Delta=k_1^2-4(-k_1-1)=(k_1+2)^2>0,$得$k_1\ne-2.$………………7 分

同理直线$PB$的方程为$y+1=k_2(x-1),$

联立方程$\begin{cases}y+1=k_2(x-1),\\ y=-x^2.\end{cases}$消去 y 得$x^2+k_2x-k_2-1=0,$

则$1\cdot x_2=-k_2-1,$即$x_2=-k_2-1.$且$k_2\ne-2.$

又$\because k_1+k_2=0,\therefore k_1\ne2.$…………………………9 分

设点 M 的坐标为（x，y），由$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA},$则$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$

$$x=\frac{-k_1-1-k_2-1}{2}=\frac{-2-(k_1+k_2)}{2}.$$

又$\because k_1+k_2=0,\therefore x=-1.$………………………………………11 分

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-x_1^2-x_2^2}{2}=\frac{-(k_1-1)^2-(-k_2-1)^2}{2}=\frac{-(-k_1-1)^2-(k_1-1)^2}{2}$$

$=-(k_1^2+1)\le -1,$

又$k_1\ne \pm 2,\therefore y\ne -5.$

∴所求 $M$ 的轨迹方程为：$x=-1(y\le -1且y\ne -5).$

**31**．解：（Ⅰ）$f'(x)=ax^2+2bx+c$，由题意及导数的几何意义得

$f'(1)=a+2b+c=0$，　　　　　　　　（1）

$f'(m)=am^2+2bm+c=-a$，　　　　　　（2）　　　　　　　………………2 分

又 $a<b<c$，可得 $4a<a+2b+c<4c$，即 $4a<0<4c$，故 $a<0, c>0,$ ………3 分

由（1）得 $c=-a-2b$，代入 $a<b<c$，再由 $a<0$，得

$-\frac{1}{3}<\frac{b}{a}<1$，　　　　　　　　　（3）　　　　　　　……………………4 分

将 $c=-a-2b$ 代入（2）得 $am^2+2bm-2b=0$，即方程 $ax^2+2bx-2b=0$ 有实根.

故其判别式 $\Delta=4b^2+8ab\geqslant 0$ 得

$\frac{b}{a}\leqslant -2$，或 $\frac{b}{a}\geqslant 0$，　　　　　　（4）　　　　　　……………………5 分

由（3），（4）得 $0\leqslant \frac{b}{a}<1$；　　　　　　　　　　　　……………………6 分

（Ⅱ）由 $f'(x)=ax^2+2bx+c$ 的判别式 $\Delta'=4b^2-4ac>0$，

知方程 $f'(x)=ax^2+2bx+c=0\,(*)$ 有两个不等实根，设为 $x_1, x_2$，

又由 $f'(1)=a+2b+c=0$ 知，$x_1=1$ 为方程（*）的一个实根，则有根与系数的关系得

$x_1+x_2=-\frac{2b}{a},\ x_2=-\frac{2b}{a}-1<0<x_1$，　　　　　　　……………………9 分

当 $x<x_2$ 或 $x>x_1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x_2<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[x_2, x_1]$，由题设知 $[x_2, x_1]=[s, t]$，

因此 $|s-t|=|x_1-x_2|=2+\frac{2b}{a}$，由（Ⅰ）知 $0\leqslant \frac{b}{a}<1$ 得 $|s-t|$ 的取值范围为 $[2, 4)$；…12 分

（Ⅲ）由 $f'(x)+a<0$，即 $ax^2+2bx+a+c<0$，即 $ax^2+2bx-2b<0$，

因为 $a<0$，则 $x^2+2\cdot\frac{b}{a}x-2\cdot\frac{b}{a}>0$，整理得 $(2x-2)\frac{b}{a}+x^2>0$，

设 $g(\frac{b}{a})=(2x-2)\frac{b}{a}+x^2$，可以看作是关于 $\frac{b}{a}$ 的一次函数，

由题意 $g(\frac{b}{a})>0$ 对于 $0\leqslant\frac{b}{a}<1$ 恒成立，

故 $\begin{cases}g(-1)\geqslant 0,\\ g(0)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2+2x-2\geqslant 0,\\ x^2>0,\end{cases}$ 得 $x\leqslant-\sqrt{3}-1$ 或 $x\geqslant\sqrt{3}-1$，

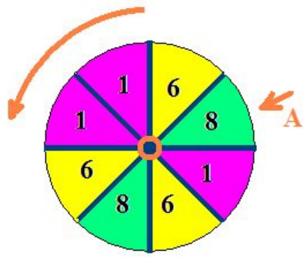
由题意，$[k,+\infty)\subseteq(-\infty,-\sqrt{3}-1]\cup[\sqrt{3}-1,+\infty)$，

故 $k\geqslant\sqrt{3}-1$，因此 $k$ 的最小值为 $\sqrt{3}-1$.　　　　　　　　……………………16 分

**32.**（本小题满分 12 分） 解：（1）依题意，随机变量ξ的取值是 0，1，6，8.

P(ξ=0)= $0.1$，P(ξ=1)= $\frac{3}{8}\times0.9$，P(ξ=6)= $\frac{3}{8}\times0.9$，P(ξ=8)= $\frac{2}{8}\times0.9$.

得 $\xi$ 分布列：　……6 分




（2）

| $\xi$ | 0 | 1 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 0.1 | $\frac{3}{8}\times0.9$ | $\frac{3}{8}\times0.9$ | $\frac{2}{8}\times0.9$ |

$E\xi=0\times0.1+\frac{3}{8}\times0.9\times1+\frac{3}{8}\times0.9\times6+\frac{2}{8}\times0.9\times8\approx4.2$.　……12 分

**33.**（本小题满分 14 分）

解：（1）$\because c^2=a^2-b^2$，$\therefore c^2=4m^2$.　……2 分　又 $\because \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ $\therefore PF_1\perp PF_2$，…………3 分　$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=(2c)^2=16m^2$.　……5 分

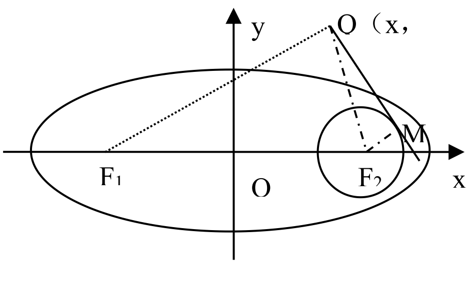
由椭圆定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=2\sqrt{6}m$，$(|PF_1|+|PF_2|)^2=16m^2+8=24m^2$，…6 分

从而得 $m^2=1$，$c^2=4m^2=4$，$c=2$.　$\therefore F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$.　…………7 分

（2）∵$F_1$（-2，0），$F_2$（2，0），

由已知：$|QF_1|=\sqrt{2}|QM|$，即 $|QF_1|^2=2|QM|^2$，所以有：$|QF_1|^2=2(|QF_2|^2-1)$，设 P（x，y），　…9 分　则 $(x+2)^2+y^2=2[(x-2)^2+y^2-1]$，…12 分

即 $(x-6)^2+y^2=32$（或 $x^2+y^2-12x+4=0$）




综上所述，所求轨迹方程为：$(x-6)^2+y^2=32$.　…14 分

**34.**（本小题满分 14 分）

解：（1）由 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$，$a_{n+1}+2a_n=3(a_n+2a_{n-1})$ $(n\geq2)$

∵$a_1=5$，$a_2=5$　　∴$a_2+2a_1=15$

故数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$是以 15 为首项，3 为公比的等比数列　　…………5 分

（2）由（1）得 $a_{n+1}+2a_n=5\cdot 3^n$　由待定系数法可得$(a_{n+1}-3^{n+1})=-2(a_n-3^n)$

即 $a_n-3^n=2(-2)^{n-1}$　故 $a_n=3^n+2(-2)^{n-1}=3^n-(-2)^n$　　………9 分

（3）由 $3^nb_n=n(3^n-a_n)=n[3^n-3^n+(-2)^n]=n(-2)^n$，∴$b_n=n(-\frac{2}{3})^n$

令 $S_n=|b_1|+|b_2|+\ldots+|b_n|=\frac{2}{3}+2(\frac{2}{3})^2+3(\frac{2}{3})^3+\ldots+n(\frac{2}{3})^n$

$\frac{2}{3}S_n=(\frac{2}{3})^2+2(\frac{2}{3})^3+\ldots+(n-1)(\frac{2}{3})^n+n(\frac{2}{3})^{n+1}$　　…………11 分

得 $\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3+\ldots+(\frac{2}{3})^n-n(\frac{2}{3})^{n+1}=\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}-n(\frac{2}{3})^{n+1}=2[1-(\frac{2}{3})^n]-n(\frac{2}{3})^{n+1}$

∴ $S_n=6[1-(\frac{2}{3})^n]-3n(\frac{2}{3})^{n+1}<6$

要使得$|b_1|+|b_2|+\ldots+|b_n|<m$ 对于 $n\in N^*$恒成立，只须 $m\geq 6$　　…14 分

**35.**（本小题满分 14 分）

解：（1）$x_1x_2\le(\frac{x_1+x_2}{2})^2=\frac{k^2}{4}$，当且仅当 $x_1=x_2=\frac{k}{2}$ 时等号成立，

故 $u$ 的取值范围为 $(0,\frac{k^2}{4}]$．……5 分

（2）解法一（函数法）　$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)=\frac{1}{x_1x_2}+x_1x_2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$

$=x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}-\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=x_1x_2-\frac{k^2-1}{x_1x_2}+2=u-\frac{k^2-1}{u}+2$ ……6 分

由 $0<u\le\frac{k^2}{4}$，又 $k\ge1$，$k^2-1\ge0$，∴ $f(u)=u-\frac{k^2-1}{u}+2$ 在 $(0,\frac{k^2}{4}]$ 上是增函数，　……7 分

所以 $(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)=u-\frac{k^2-1}{u}+2\le\frac{k^2}{4}-\frac{k^2-1}{\frac{k^2}{4}}+2=\frac{k^2}{4}-2+\frac{4}{k^2}=(\frac{2}{k}-\frac{k}{2})^2$

即当 $k\ge1$ 时不等式 $(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)\le(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2$ 成立．　………9 分

解法二（不等式证明的作差比较法）

$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)-(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2=\frac{1}{x_1x_2}+x_1x_2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}-\frac{4}{k^2}-\frac{k^2}{4}+2$

$=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{4}{k^2}-(\frac{k^2}{4}-x_1x_2)-(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2)=\frac{k^2-4x_1x_2}{k^2x_1x_2}-\frac{k^2-4x_1x_2}{4}-\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}$，

将$k^2-4x_1x_2=(x_1-x_2)^2$代入得

$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)-(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2=\frac{(x_1-x_2)^2(4-k^2x_1x_2-4k^2)}{4k^2x_1x_2}$，　　……6 分

$\because (x_1-x_2)^2\geq 0$，$k\geq 1$时$4-k^2x_1x_2-4k^2=4(1-k^2)-k^2x_1x_2<0$，

$\therefore \frac{(x_1-x_2)^2(4-k^2x_1x_2-4k^2)}{4k^2x_1x_2}\leq 0$，

即当$k\geq 1$时不等式$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)\leq(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2$成立．……………9 分

（3）解法一（函数法）

记$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)=u+\frac{1-k^2}{u}+2=f(u)$，则$(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2=f(\frac{k^2}{2})$，

即求使$f(u)\geq f(\frac{k^2}{4})$对$u\in(0,\frac{k^2}{4}]$恒成立的$k$的范围．　　…………10 分

由（2）知，要使$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)\geq(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2$对任意$(x_1,x_2)\in D$恒成立，必有$0<k<1$，

因此$1-k^2>0$，

$\therefore$函数$f(u)=u+\frac{1-k^2}{u}+2$在$(0,\sqrt{1-k^2}]$上递减，在$[\sqrt{1-k^2},+\infty)$上递增，………12 分

要使函数$f(u)$在$(0,\frac{k^2}{4}]$上恒有$f(u)\geq f(\frac{k^2}{4})$，必有$\frac{k^2}{4}\leq\sqrt{1-k^2}$，即$k^4+16k^2-16\leq 0$，

解得$0<k^2\leq 4\sqrt{5}-8$．　　……………14 分

解法二（不等式证明的作差比较法）

由(2)可知$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)-(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2=\frac{(x_1-x_2)^2(4-k^2x_1x_2-4k^2)}{4k^2x_1x_2}$，

要不等式恒成立，必须$4-k^2x_1x_2-4k^2\geq 0$恒成立，　　…………10 分

即$x_1x_2\leq\frac{4-4k^2}{k^2}$恒成立，　　…………11 分

由$0<x_1x_2\le\frac{k^2}{4}$得$\frac{k^2}{4}\le\frac{4-4k^2}{k^2}$，即$k^4+16k^2-16\le0$，　　…………13 分

解得$0<k^2\le4\sqrt{5}-8$.

因此不等式$(\frac{1}{x_1}-x_1)(\frac{1}{x_2}-x_2)\ge(\frac{k}{2}-\frac{2}{k})^2$恒成立的$k^2$的范围是$0<k^2\le4\sqrt{5}-8$.　……14 分

36、解：(1）设椭圆的焦距为 $2c$,因为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以有$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，故有$a^2=3b^2$。从而椭圆

C 的方程可化为：$x^2+3y^2=3b^2$　　①　　………2 分

易知右焦点 $F$ 的坐标为（$\sqrt{2}b,0$），

据题意有 $AB$ 所在的直线方程为：$y=x-\sqrt{2}b$　　②　　………3 分

由①，②有：$4x^2-6\sqrt{2}bx+3b^2=0$　　③

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，弦 $AB$ 的中点$N(x_0,y_0)$，由③及韦达定理有：

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3\sqrt{2}b}{4},y_0=x_0-\sqrt{2}b=-\frac{\sqrt{2}}{4}b.$$

所以$K_{ON}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{3}$，即为所求。　　………5 分

(2) 显然$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$可作为平面向量的一组基底，由平面向量基本定理，对于这一平面内的向量$\overrightarrow{OM}$，有且只有一对实数$\lambda,\mu$，使得等式$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$成立。设$M(x,y)$，由 1）中各点的坐标有：

$(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$，

所以$x=\lambda x_1+\mu x_2,y=\lambda y_1+\mu y_2$。　　………7 分

又点在椭圆 C 上，所以有$(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$

整理为$\lambda^2(x_1{}^2+3y_1{}^2)+\mu^2(x_2{}^2+3y_2{}^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$。　　④

由③有：$x_1+x_2=\frac{3\sqrt{2}b}{2},x_1\cdot x_2=\frac{3b^2}{4}$。所以

$$\begin{aligned}x_1x_2+3y_1y_2&=x_1x_2+3(x_1-\sqrt{2}b)(x_2-\sqrt{2}b)=4x_1x_2-3\sqrt{2}b(x_1+x_2)+6b^2\\&=3b^2-9b^2+6b^2=0\end{aligned}\quad⑤$$

又 A、B 在椭圆上，故有 $(x_1^{\ 2}+3y_1^{\ 2})=3b^2,(x_2^{\ 2}+3y_2^{\ 2})=3b^2$ ⑥

将⑤，⑥代入④可得：$\lambda^2+\mu^2=1$。 ·········11 分

对于椭圆上的每一个点 $M$，总存在一对实数，使等式 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 成立，而 $\lambda^2+\mu^2=1$

在直角坐标系 $x-o-y$ 中，取点 P（$\lambda,\mu$），设以 $x$ 轴正半轴为始边，以射线 OP 为终边的角为 $\theta$，

显然 $\lambda=\cos\theta,\mu=\sin\theta$。也就是：对于椭圆 $C$ 上任意一点 M，总存在角 $\theta$（$\theta\in$R）使等式：$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sin\theta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 成立。

37、（1）解法一：设 $M(x,y)$，则由题设得 $|MF|=|y+2|-1$， ············1 分

即 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+2|-1$

当 $y\geq -2$ 时，$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=y+1$，化简得 $x^2=4y$； ············3 分

当 $y<-2$ 时，$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=-y-3$， ············4 分

化简得 $x^2=8y+8$ 与 $y<-3$ 不合

故点 M 的轨迹 C 的方程是 $x^2=4y$ ············5 分

（1）解法二：$\because$ 点 $M$ 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到直线 $l:y=-2$ 的距离小于 1，

∴点 M 在直线 $l$ 的上方，

点 M 到 F（1，0）的距离与它到直线 $l':y=-1$ 的距离相等 ············3 分

$\therefore$ 点 $M$ 的轨迹 $C$ 是以 $F$ 为焦点，$l'$ 为准线的抛物线

所以曲线 C 的方程为 $x^2=4y$ ············5 分

（2）当直线 m 的斜率不存在时，它与曲线 C 只有一个交点，不合题意，

设直线 m 的方程为 $y-2=k(x-2)$，即 $y=kx+(2-2k)$，

代入 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx+8(k-1)=0$ （☆） ············6 分

$\Delta=16(k^2-2k+2)>0$ 对 $k\in R$ 恒成立，所以，直线 $m$ 与曲线 C 恒有两个不同的交点

设交点 A，B 的坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=8(k-1)$ ············7 分

①由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,且$\lambda=1$得点$P$是弦$AB$的中点，

$\therefore x_1+x_2=4$,则$4k=4$,得$k=1\therefore$ 直线$m$的方程是$x-y=0$ …………9 分

②$\because |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_2+x_1)^2-4x_2x_1]}=4\sqrt{(1+k^2)(k^2-2k+2)}$

点 O 到直线 m 的距离$d=\dfrac{|2-2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\Delta ABO}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=4|k-1|\sqrt{k^2-2k+2}=4\sqrt{(k-1)^4+(k-1)^2}$ …………10 分

$\because S_{\Delta ABO}=4\sqrt{2},\therefore 4\sqrt{(k-1)^4+(k-1)^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore (k-1)^4+(k-1)^2-2=0,(k-1)^2=1$或$(k-1)^2=-2$（舍去）

$\therefore k=0$或$k=2$ …………12 分

当$k=0$时,方程（☆）的解为$\pm 2\sqrt{2}$

若$x_1=2\sqrt{2},x_2=-2\sqrt{2}$,则$\lambda=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}-1}=3-2\sqrt{2}$

若$x_1=-2\sqrt{2},x_2=2\sqrt{2}$,则$\lambda=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}=3+2\sqrt{2}$ …………13 分

当$k=2$时,方程（☆）的解为$4\pm 2\sqrt{2}$

若$x_1=4+2\sqrt{2},x_2=4-2\sqrt{2}$,则$\lambda=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

若$x_1=4-2\sqrt{2},x_2=4+2\sqrt{2}$,则$\lambda=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$ …………14 分

所以，$\lambda=3+2\sqrt{2}$或$\lambda=3-2\sqrt{2}$

38、解：（1）$\because$ 点$P_n(n,S_n)$都在函数$f(x)=x^2+2x$的图像上，$\therefore S_n=n^2+2n(n\in N^*)$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1$.

当 n＝1 时，$a_1=S_1=3$满足上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$.…….3 分

（2）由$f(x)=x^2+2x$求导可得$f'(x)=2x+2$

$\because$ 过点$P_n(n,S_n)$的切线的斜率为$k_n$，$\therefore k_n=2n+2$.

$\therefore b_n = 2^{k_n} a_n = 4\cdot(2n+1)\cdot 4^n$.

$\therefore T_n = 4\times3\times4^1 + 4\times5\times4^2 + 4\times7\times4^3 + \cdots + 4\times(2n+1)\times4^n$ ①

由①×4，得 $4T_n = 4\times3\times4^2 + 4\times5\times4^3 + 4\times7\times4^4 + \cdots + 4\times(2n+1)\times4^{n+1}$ ②

①-②得：

$-3T_n = 4\left[3\times4 + 2\times\left(4^2+4^3+\cdots+4^n\right) - (2n+1)\times4^{n+1}\right]$

$= 4\left[3\times4 + 2\times\dfrac{4^2(1-4^{n-1})}{1-4} - (2n+1)\times4^{n+1}\right]$ $\quad\therefore T_n = \dfrac{6n+1}{9}\cdot4^{n+2} - \dfrac{16}{9}$ ..........7 分

（3）$\because Q=\{x\,|\,x=2n+2, n\in N^*\}, R=\{x\,|\,x=4n+2, n\in N^*\}$，$\therefore Q\cap R = R$.

又$\because c_n \in Q\cap R$，其中 $c_1$ 是 $Q\cap R$ 中的最小数，$\therefore c_1 = 6$.

$\because \{c_n\}$ 是公差是 4 的倍数，$\therefore c_{10} = 4m+6 (m\in N^*)$.

又$\because 110 < c_{10} < 115$，$\therefore \begin{cases}110 < 4m+6 < 115\\ m\in N^*\end{cases}$,解得 m＝27.所以 $c_{10}=114$，

设等差数列的公差为 $d$，则 $d=\dfrac{c_{10}-c_1}{10-1}=\dfrac{114-6}{9}=12$,

$\therefore c_n = 6+(n+1)\times12 = 12n-6$，所以 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n = 12n-6$ …………12 分

39、解：①$\because S_{n+1}-3S_n+2S_{n-1}+1=0 \Rightarrow S_{n+1}-S_n = 2(S_n-S_{n-1})-1$

$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - 1 (n\ge2)$ ---------2 分

又 $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_2=2$ 也满足上式，$\therefore a_{n+1}=2a_n-1 (n\in N^*) \Rightarrow a_{n+1}-1 = 2(a_n-1)$（$n\in N^*$）

$\therefore$数列 $\{a_n-1\}$ 是公比为 2，首项为 $a_1-1=\dfrac{1}{2}$ 的等比数列 ----------- 4 分

$a_n - 1 = \dfrac{1}{2}\times2^{n-1} = 2^{n-2}$ -------------- 6 分

② $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \left(2^{-1}+1\right)+\left(2^0+1\right)+\left(2^1+1\right)+\ldots+\left(2^{n-2}+1\right)$

② $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$

$=\left(2^{-1}+1\right)+\left(2^0+1\right)+\left(2^1+1\right)+\ldots+\left(2^{n-2}+1\right)$

$=\left(2^{-1}+2^0+2^1+\ldots2^{n-2}\right)+n \quad = \dfrac{2^n-1}{2}+n$ -------------（9 分）

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{S_n-n}{a_n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^n}} = 2$ ---------------（12 分）

40、解：（1）令 $x=\dfrac{1}{2}$的$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$

令 $x=\frac{1}{n}$ 得 $f(\frac{1}{n})+f(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{n})+f(\frac{n-1}{n})$

（2）$a_n=f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})+f(1)$

又 $a_n=f(1)+f(\frac{n-1}{n})+\cdots+f(\frac{1}{n})+f(0)$，两式相加

$2a_n=[f(0)+f(1)]+[f(\frac{1}{n})+f(\frac{n-1}{n})]+\cdots+[f(1)+f(0)]=\frac{n+1}{2}$

$a_n=\frac{n+1}{4}(n\in N^*)$　　　　$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}$,故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

（3）$b_n=\frac{4}{4a_n-1}=\frac{4}{n}$

$T_n=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=16(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\ \le 16[1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)})$

$=16[1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]=16(2-\frac{1}{n})=32-\frac{16}{n}=S_n$

$T_n\le S_n$

**41**.解：（1）$\because b_n=a_n+n^2$

$\therefore b_{n+1}=a_{n+1}+(n+1)^2=2a_n+(n+1)^2-4(n+1)+2+(n+1)^2$

$=2a_n+2n^2=2b_n$ (n≥2) …………3 分

由 $a_1=2a+1$ 得 $a_2=4a$，$b_2=a_2+4=4a+4$，

$\because a\ne -1$，$\therefore$ $b_2\ne 0$，…………4 分

即 $\{b_n\}$ 从第 2 项起是以 2 为公比的等比数列。…………5 分

（2）$S_n=a+\frac{(4a+4)(2^{n-1}-1)}{2-1}=-3a-4+(2a+2)2^n$ …………8 分

当 n≥2 时，$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{(2a+2)2^n-3a-4}{(2a+2)2^{n-1}-3a-4}=2+\frac{3a+4}{(a+1)2^{n-1}-3a-4}$

$\because \{S_n\}$ 是等比数列, $\therefore \frac{S_n}{S_{n-1}}$ (n≥2)是常数，

∴3a+4=0，即 $a=-\frac{4}{3}$ 。…………11 分

（3）由（1）知当 $n\ge 2$ 时，$b_n=(4a+4)2^{n-2}=(a+1)2^n$，

所以$a_n=\begin{cases}2a+1 & (n=1)\\(a+1)2^n-n^2(n\ge 2)\end{cases}$，…………13 分

所以数列$\{a_n\}$为 2a+1，4a，8a-1，16a，32a+7，……

显然最小项是前三项中的一项。…………15 分

当$a\in(0,\frac{1}{4})$时，最小项为 8a-1；

当$a=\frac{1}{4}$时，最小项为 4a 或 8a-1；………16 分

当$a\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$时，最小项为 4a；

当$a=\frac{1}{2}$时，最小项为 4a 或 2a+1；…………17 分

当$a\in(\frac{1}{2},+\infty)$时，最小项为 2a+1。…………18 分

**42**. 解：（1）$y^2=4x$ …………4 分

（2）设$N(\frac{t^2}{4},-t)$（t>0），则$M(t^2,2t)$，F(1,0)。

因为 M、F、N 共线，则有$k_{FM}=k_{NF}$，…………6 分

所以$\frac{-t}{\frac{1}{4}t^2-1}=\frac{2t}{t^2-1}$，解得$t=\sqrt{2}$，…………8 分

所以$k=\frac{2\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}$，…………10 分

因而，直线 MN 的方程是$y=2\sqrt{2}(x-1)$。…………11 分

（3）“逆向问题”一：

①已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线 C 于 P、Q 两点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 R，则直线 RQ 必过定点$A(-\frac{p}{2},0)$。…………13 分

证明：设过 F 的直线为 y=k(x$-\frac{p}{2}$)，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$R(x_1,-y_1)$

由$\begin{cases}y^2=4x\\y=k(x-\frac{p}{2})\end{cases}$得$k^2x^2-(pk^2+4)x+\frac{1}{4}p^2k^2=0$，所以$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，…………14 分

$k_{RA}=\dfrac{-y_1}{x_1+\dfrac{p}{2}}=-\dfrac{k(x_1-\dfrac{p}{2})}{x_1+\dfrac{p}{2}}$，…………15 分

$k_{QA}=\dfrac{k(x_2-\dfrac{p}{2})}{x_2+\dfrac{p}{2}}=\dfrac{k(x_1x_2-\dfrac{p}{2}x_1)}{x_1x_2+\dfrac{p}{2}x_1}=-\dfrac{k(x_1-\dfrac{p}{2})}{x_1+\dfrac{p}{2}}=k_{RA}$，…………16 分

所以直线 RQ 必过焦点 A。…………17 分

[注：完成此解答最高得 6 分。]

②过点 $A(-\frac{p}{2},0)$ 的直线交抛物线 C 于 P、Q 两点，FP 与抛物线交于另一点 R，则 RQ 垂直于 x 轴。

[注：完成此解答最高得 6 分。]

③已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，过点 B(m,0)（m>0）的直线交抛物线 C 于 P、Q 两点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 R，则直线 RQ 必过定点 A(-m,0)。

[注：完成此解答最高得 7 分，其中问题 3 分。]

“逆向问题”二：已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点为 $F_1$(-c,0)，$F_2$(c,0)，过 $F_2$ 的直线交椭圆 C 于 P、Q 两点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 R，则直线 RQ 必过定点 $A(\dfrac{a^2}{c},0)$。

[注：完成此解答最高得 9 分，其中问题 4 分。]

“逆向问题”三：已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点为 $F_1$(-c,0)，$F_2$(c,0)，过 $F_2$ 的直线交双曲线 C 于 P、Q 两点，设点 P 关于 x 轴的对称点为 R，则直线 RQ 必过定点 $A(\dfrac{a^2}{c},0)$。

[注：完成此解答最高得 9 分，其中问题 4 分。]其它解答参照给分。

**43**．(1) $a_{n+1}=\dfrac{5+2a_n}{16-8a_n}$，因为 $a_1=1,$所以 $a_2=\dfrac{7}{8},a_3=\dfrac{3}{4}.$ ………………………………… 2 分

（2）因为 $a_n>0,a_{n+1}>0,$所以 $16-8a_n>0,0<a_n<2.$ ………………………………………3 分

$a_{n+1}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{5+2a_n}{16-8a_n}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{48(a_n-\dfrac{5}{4})}{32(2-a_n)}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n-\dfrac{5}{4}}{2-a_n}$,……………………………………………………5 分

因为 $2-a_n>0,$所以 $a_{n+1}-\dfrac{5}{4}$ 与 $a_n-\dfrac{5}{4}$ 同号，…………………………………………………6 分

因为 $a_1-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}<0$，$a_2-\dfrac{5}{4}<0,\ a_3-\dfrac{5}{4}<0,$

…，$a_n-\dfrac{5}{4}<0,$ 即 $a_n<\dfrac{5}{4}.$ ……………………………………………………………………8 分

（3）当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\dfrac{5}{4}-a_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2-a_{n-1}}\cdot(\dfrac{5}{4}-a_{n-1})=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2-a_{n-1}}\cdot b_{n-1}<\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2-\dfrac{5}{4}}\cdot b_{n-1}=2b_{n-1}$，10 分

所以 $b_n<2\cdot b_{n-1}<2^2\cdot b_{n-2}<\cdots<2^{n-1}b_1=2^{n-3}$，……………………………………………12 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3-n}=\frac{\frac{1}{4}(1-2^n)}{1-2}=\frac{1}{4}(2^n-1)$ …………14 分

**44**．（1）∵当 a=1 时 $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)$=0，得 $x$=0 或 $x$=1………………………2 分

当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$

∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ 上单调递增，∴ $f(x)$ 的极小值为 $f(1)$=-2.……4 分

（2）∵ $f'(x)=3x^2-3a\geq-3a$ ……………………………………………………………6 分

∴要使直线 $x+y+m$=0 对任意的 $m\in R$ 总不是曲线 $y=f(x)$ 的切线，当且仅当-1<-3a,

∴ $a<\frac{1}{3}$.………………………………………………………………………8 分

(3)因 $g(x)=|f(x)|=|x^3-3ax|$ 在[-1,1]上为偶函数,故只求在 [0,1]上最大值，…………9 分

① 当 $a\leq0$ 时，$f'(x)\geq0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增且 $f(0)=0$，

∴ $g(x)=|f(x)|=f(x)$，∴ $F(a)=f(1)=1-3a$.…………………………………………10 分

② 当 $a>0$ 时　$f'(x)=3x^2-3a=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

i　. 当 $\sqrt{a}\geq1$，即 $a\geq1$ 时 $g(x)=|f(x)|=-f(x)$，$-f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，此时 $F(a)=-f(1)=3a-1$ ……………………………………………………………12 分

ii. 当 $0<\sqrt{a}<1$，即 $0<a<1$ 时，$g(x)=|f(x)|$ 在 $\left[0,\sqrt{a}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{a},1\right]$ 上单调递增.

$1^0$ 当 $f(1)=1-3a\leq0$ 即 $\frac{1}{3}\leq a<1$ 时，$g(x)=|f(x)|=-f(x)$ 在 $\left[0,\sqrt{a}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\sqrt{a},1\right]$ 上单调递减，故 $F(a)=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$. ……………………………………14 分

$2^0$ 当 $f(1)=1-3a>0$ 即 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，

（i）当 $-f(\sqrt{a})\leq f(1)=1-3a$ 即 $0<a\leq\frac{1}{4}$ 时，　$F(a)=f(1)=1-3a$

（ii） 当 $-f(\sqrt{a})>f(1)=1-3a$ 即 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{3}$ 时，$F(a)=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$

综上 $F(a)=\begin{cases}1-3a,(a\leq\frac{1}{4}),\\ 2a\sqrt{a},(\frac{1}{4}<a<1),\\ 3a-1,[1,+\infty).\end{cases}$ ……………………………………………………16 分

**45．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 8 分, 第 2 小题满分 6 分**

（1）$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,a_{n+1}-a_n),\overrightarrow{B_nC_n}=(-1,-b_n),\because\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$与$\overrightarrow{B_nC_n}$共线，$\therefore a_{n+1}-a_n=n,$

又∵{Bn}在方向向量为（1，6）的直线上，$\therefore\dfrac{b_{n+1}-b_n}{n+1-n}=6,$即$b_{n+1}-b_n=6$

$\therefore b_n=-a+6(n-1)$

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})=a+b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}$

$=a+(-a)(n-1)+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\times 6$

$=a-a(n-1)+3(n-1)(n-2)=3n^2-(9+a)n+6+2a(n\geq 2)$

（2）∵二次函数 $f(x)=3x^2-(a+9)x+6+2a$ 是开口向上，对称轴为 $x=\dfrac{a+9}{6}$ 的抛物线

又因为在 $a_6$ 与 $a_7$ 两项中至少有一项是数列{an}的最小项，

∴对称轴 $x=\dfrac{a+9}{6}$应该在$[\dfrac{11}{2},\dfrac{15}{2}]$内，即$\dfrac{11}{2}\leq\dfrac{a+9}{6}\leq\dfrac{15}{2},\therefore 24\leq a\leq 36$

**46．（本题满分 14 分）本题共 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 10 分**

解：（1）由$|PF_1|-|PF_2|=2<|F_1F_2|$知，点 P 的轨迹 E 是以 $F_1$、$F_2$ 为焦点的双曲线右支，由

$c=2,2a=2,\therefore b^2=3$，故轨迹 E 的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x\geq 1).$…………4 分

（2）当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线方程为 $y=k(x-2),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，与双曲线方程

联立消 y 得 $(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$，

$\therefore\begin{cases}k^2-3\neq 0\\ \Delta>0\\ x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}>0\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}>0\end{cases}$ 解得 $k^2>3$ ……………………………………5 分

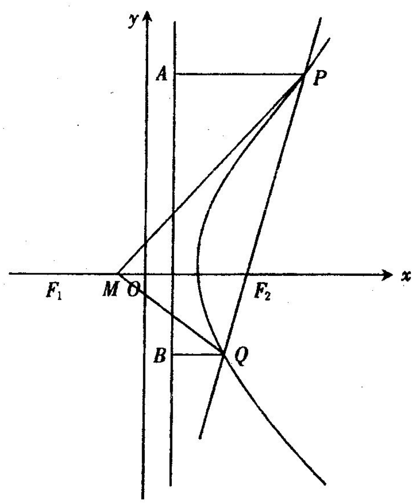
（i）$\because\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2$

$=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+m^2+4k^2$

$=\dfrac{(k^2+1)(4k^2+3)}{k^2-3}-\dfrac{4k^2(2k^2+m)}{k^2-3}+m^2+4k^2$

$=\dfrac{3-(4m+5)k^2}{k^2-3}+m^2.$……………………7分




$\because MP\perp MQ,\therefore\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，

故得$3(1-m^2)+k^2(m^2-4m-5)=0$对任意的

$k^2>3$恒成立，

$\therefore \begin{cases}1-m^2=0\\ m^2-4m-5=0\end{cases}$，解得$m=-1$.

∴当 $m=-1$ 时，$MP\perp MQ$.

当直线 $l$ 的斜率不存在时，由$P(2,3),Q(2,-3)$及$M(-1,0)$知结论也成立，

综上，当 $m=-1$ 时，$MP\perp MQ$. ……………………………………………8 分

（ii）$\because a=1,c=2,\therefore$ 直线 $x=\dfrac{1}{2}$是双曲线的右准线，…………………………9 分

由双曲线定义得：$|PA|=\dfrac{1}{e}|PF_2|=\dfrac{1}{2}|PF_2|,|QB|=\dfrac{1}{2}|QF_2|$，

方 法 一 ： $\therefore \lambda=\dfrac{|PQ|}{2|AB|}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|}{2|y_2-y_1|}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|}{2|k(x_2-x_1)|}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$.

$\because k^2>3,\therefore 0<\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{3}$,故$\dfrac{1}{2}<\lambda<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， …………………………………………12 分

注意到直线的斜率不存在时，$|PQ|=|AB|$,此时$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

综上，$\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………………………………………………14 分

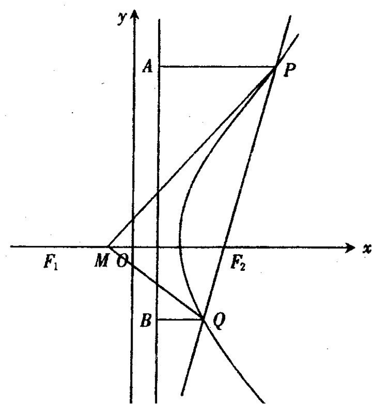
方法二：设直线 PQ 的倾斜角为θ，由于直线 PQ 与双曲线右支有二个交点，

$\therefore \dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$，过 Q 作 QC⊥PA，垂足为 C，则

$\angle PQC=|\dfrac{\pi}{2}-\theta|,\therefore \lambda=\dfrac{|PQ|}{2|AB|}=\dfrac{|PQ|}{2|CQ|}=\dfrac{1}{2\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)}=\dfrac{1}{2\sin\theta}$. …………12 分

由$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$,得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\le 1$,

故：$\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ………………14 分




**47. （本题满分 16 分）第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分**

解：$f'(x)=3ax^2+2bx-a^2(a>0)$.………1 分

（1）$\because x_1=-1, x_2=2$是函数$f(x)$的两个极值点，

$\therefore f'(-1)=0, f'(2)=0.$ ……………………………………………………………2 分

$\therefore 3a-2b-a^2=0, 12a+4b-a^2=0,$ 解得 $a=6, b=-9.$ ………………………3 分

$\therefore f(x)=6x^3-9x^2-36x.$ ……………………………………………………………4 分

（2）∵$x_1$、$x_2$是 $f(x)$是两个极值点，$\therefore f'(x_1)=f'(x_2)=0.$

∴$x_1$、$x_2$是方程$3ax^2+2bx-a^2=0$的两根.

∵△$=4b^2+12a^3$，　∴△>0 对一切 $a>0$，$b\in R$ 恒成立.

$x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}, x_1\cdot x_2=-\dfrac{a}{3},$

$\because a>0,\quad \therefore x_1\cdot x_2<0.$

$\therefore |x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{(-\dfrac{2b}{3a})^2-4(-\dfrac{a}{3})}=\sqrt{\dfrac{4b^2}{9a^2}+\dfrac{4}{3}a}.$ ……………………6 分

由$|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$　得$\sqrt{\dfrac{4b^2}{9a^2}+\dfrac{4}{3}a}=2\sqrt{2},\quad \therefore b^2=3a^2(6-a).$ ………………7 分

$\because b^2\geq 0,\quad \therefore 3a^2(6-a)\geq 0,\quad 0<a\leq 6.$ ……………………………………… 8 分

令$h(a)=3a^2(6-a),$ 则 $h'(a)=-9a^2+36a.$

$0<a<4$ 时, $h'(a)>0\quad \therefore h(a)$在（0，4）内是增函数；

$4<a<6$ 时, $h'(a)<0\quad$ ∴$h(a)$在（4，6）内是减函数.

∴$a=4$时，$h(a)$有极大值为 96，$\therefore h(a)$在$(0,6]$上的最大值是 96，

∴$b$的最大值是$4\sqrt{6}.$ ……………………………………………………………………10 分

（3）证法一：∵$x_1$、$x_2$是方程$f'(x)=0$的两根，

$\therefore f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)$，…………………………………………………… 12 分

$\therefore |g(x)|=3a|x-x_1|\cdot|x-x_2-\dfrac{1}{3}|\leq 3a(\dfrac{|x-x_1|+|x-x_2-\dfrac{1}{3}|}{2})^2$ ………… 14 分

$\because x_1 < x < x_2, \therefore x - x_1 > 0, x - x_2 < 0,$

$\therefore |g(x)| \le \frac{3a}{4}[(x-x_1)-(x-x_2-\frac{1}{3})]^2 = \frac{3a}{4}(x_2 - x_1 + \frac{1}{3})^2.$

$\because x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{3}, x_2 = a, \quad \therefore x_1 = -\frac{1}{3}.$

$\therefore |g(x)| \le \frac{3a}{4} \cdot (a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{12}a(3a+2)^2.$ ……………………………………16 分

证法二：∵$x_1$、$x_2$是方程 $f'(x)=0$ 的两根，

$\therefore f'(x) = 3a(x-x_1)(x-x_2)$ .………………………………………………………… 12 分

$\because x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{3}, x_2 = a, \quad \therefore x_1 = -\frac{1}{3}.$

$\therefore |g(x)| = |3a(x+\frac{1}{3})(x-a) - a(x+\frac{1}{3})|. = |a(x+\frac{1}{3})[3(x-a)-1]|$

∵$x_1 < x < x_2$， $\therefore |g(x)| = a(x+\frac{1}{3})(-3x+3a+1)$ ……………………………… 14 分

$= -3a(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3a+1}{3}) = -3a(x-\frac{a}{2})^2 + \frac{3a^3}{4} + a^2 + \frac{1}{3}a \le \frac{3a^3}{4} + a^2 + \frac{1}{3}a = \frac{a(3a+2)^2}{12}$ …16 分

**48**．（14 分）解：设 2，$f(a_1), f(a_2), f(a_3)$,……，$f(a_n)$,2n+4 的公差为 d，则

2n+4=2+(n+2－1)d⇒d=2,…………………………（2 分）

$\therefore f(a_n) = 2 + (n+1-1)d = 2 + nd = 2n+2 \Rightarrow \log_a a_n = 2n+2$

$\therefore a_n = a^{2n+2}$. ……………………（4 分）

（2）$\because b_n = a_n \cdot f(a_n) = a^{2n+2} \cdot \log_a a^{2n+2} = (2n+2)a^{2n+2}$，

$\therefore S_n = 4a^4 + 6a^6 + \ldots + 2n \cdot a^{2n} + (2n+2)a^{2n+2}$

$\therefore a^2S_n=4a^6+6a^8+\ldots+(2n-2)\cdot a^{2n}+2n\cdot a^{2n+2}+(2n+2)a^{2n+4}$

$(1-a^2)S_n=4a^4+2[a^6+\ldots+a^{2n+2}]-(2n+2)a^{2n+4},\because a\neq 1,$

$\therefore S_n=\dfrac{2a^4(1-a^{2n})}{(1-a^2)^2}+\dfrac{2a^4-(2n+2)a^{2n+4}}{1-a^2}=\dfrac{2a^4}{1-a^2}[\dfrac{1-a^{2n}}{1-a^2}+1-(n+1)a^{2n}],\ldots$(8分)

$\because \dfrac{2a^4}{1-a^2}<1,$又$0<a<1\Rightarrow 2a^4+a^2-1=(2a^2-1)(a^2+1)<0,$

故$2a^2-1<0,$解得$,0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$..........................(10分)

$\because \dfrac{2a^4}{1-a^2}<1,$又$a^{2n}>0,$

$\therefore S_n+\dfrac{2na^{2n+4}}{1-a^2}=\dfrac{2a^4}{1-a^2}(\dfrac{1-a^{2n}}{1-a^2}+1-a^{2n})$......(11分)

$<\dfrac{1-a^{2n}}{1+a^2}+1-a^{2n}$......(12分)$<\dfrac{1}{1-a^2}+1$......(13分)$<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}+1=3$...............(14分)

**49**．解：（I）$|PF_1|=2|PF_2|,|PF_1|-|PF_2|=2a\ \therefore|PF_1|=4a,|PF_2|=2a$

$\because PF_1\perp PF_2\ \therefore(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2\ \therefore e=\sqrt{5}$

（II）$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1$渐近线为$y=\pm 2x$设$P_1(x_1,2x_1),P_2(x_2,-2x_2),P(x,y)$

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=-3x_1x_2=-\dfrac{27}{4}\ \therefore x_1x_2=\dfrac{9}{4}$，$\because 2\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\vec{0}$

$\therefore x=\dfrac{2x_1+x_2}{3},y=\dfrac{2(2x_1-x_2)}{3}$代入$E$化简$x_1x_2=\dfrac{9}{8}a^2\ \therefore a^2=2$

$\therefore \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=1$

（III）假设在$x$轴上存在定点$G(t,0)$使$\overrightarrow{F_1F_2}\perp(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN})$，

设$l:x=ky+m,M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$联立$l$与$E$的方程得

$(4k^2-1)y^2+8kmy+4m^2-8=0$故$\begin{cases}y_3+y_4=\dfrac{-8km}{4k^2-1}(1)\\ y_3y_4=\dfrac{4m^2-8}{4k^2-1}(2)\end{cases}$

$\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN}=(x_3-t-\lambda x_4+\lambda t,y_3-\lambda y_4),\overrightarrow{F_1F_2}=(2\sqrt{10},0)$

$\overrightarrow{F_1F_2}\perp(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN})\Leftrightarrow x_3-t-\lambda x_4+\lambda t=0\Leftrightarrow k(y_3-\lambda y_4)+(1-\lambda)m+(\lambda-1)t=0(3)$

由$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{QN}\ \therefore y_3+\lambda y_4=0\ \therefore y_3=-\lambda y_4(4)$

∴（3）即为$2ky_3+(1-\lambda)m+(\lambda-1)t=0(5)$，将（4）代入（1）（2）

有$y_3=(\lambda-1)\dfrac{m^2-2}{2km}$代入（5）得$t=\dfrac{2}{m}$

故在$x$轴上存在定点$G(\dfrac{2}{m},0)$使$\overrightarrow{F_1F_2}\perp(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN})$。

**50**．解：（Ⅰ）因为$f'(x)=3ax^2+6x-6a$,所以$f'(-1)=0$即$3a-6-6a=0$,所以$a$=－2.

(Ⅱ)因为直线$m$恒过点（0，9）.

先求直线$m$是$y$=$g(x)$ 的切线.设切点为$(x_0,3x_0^2+6x_0+12)$,因为$g'(x_0)=6x_0+6$.

所以切线方程为$y-(3x_0^2+6x_0+12)=(6x_0+6)(x-x_0)$,将点（0，9）代入得$x_0=\pm1$.

当$x_0=-1$时，切线方程为$y$=9, 当$x_0=1$时，切线方程为$y$=12$x$+9.

由$f^{/}(x)=0$得$-6x^2+6x+12=0$，即有$x=-1,x=2$

当$x=-1$时，$y=f(x)$的切线$y=-18$，

当$x=2$时，$y=f(x)$的切线方程为$y=9\ \therefore\ y=9$是公切线，

又由$f^{/}(x)=12$得$-6x^2+6x+12=12\ \therefore\ x=0$或$x=1$，

当$x=0$时$y=f(x)$的切线为$y=12x-11$，

当$x=1$时$y=f(x)$的切线为$y=12x-10$，$\therefore\ y=12x+9$，不是公切线

综上所述 $k=0$时$y=9$是两曲线的公切线

(III).（1）$kx+9\le g(x)$得$kx\le 3x^2+6x+3$，当$x=0$，不等式恒成立，$k\in R$.

当$-2\le x<0$时，不等式为$k\ge 3(x+\dfrac{1}{x})+6$，

而$3(x+\dfrac{1}{x})+6=-3[(-x)+\dfrac{1}{(-x)}]+6\le -3\cdot 2+6=0\ \therefore k\ge 0$

当$x>0$时，不等式为$k\le 3(x+\dfrac{1}{x})+6$，$\because\ 3(x+\dfrac{1}{x})+6\ge 12\quad \therefore\ k\le 12$

$\therefore$当$x\ge -2$时,$kx+9\le g(x)$恒成立，则$0\le k\le 12$

（2）由$f(x)\le kx+9$得$kx+9\ge -2x^3+3x^2+12x-11$

当$x=0$时，$9\ge -11$恒成立，$k\in R$，当$-2\le x<0$时有$k\le -2x^2+3x+12-\dfrac{20}{x}$

设$h(x)=-2x^2+3x+12-\dfrac{20}{x}=-2(x-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{105}{8}-\dfrac{20}{x}$，

当$-2\le x<0$时$-2(x-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{105}{8}$为增函数，$-\dfrac{20}{x}$也为增函数$\therefore\ h(x)\ge h(-2)=8$

$\therefore$要使$f(x)\le kx+9$在$-2\le x<0$上恒成立，则$k\le 8$

由上述过程只要考虑$0\le k\le 8$，

则当$x>0$时$f^{/}(x)=-6x^2+16x+12=-6(x+1)(x-2)$

$\therefore$在$x\in(0,2]$时$f^{/}(x)>0$,在$(2,+\infty)$时$f^{/}(x)<0\ \therefore\ f(x)$在$x=2$时有极大值即$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值，又$f(2)=9$，即$f(x)\le 9$而当$x>0,k\ge 0$时$kx+9>9$，$\therefore\ f(x)\le kx+9$一定成立

综上所述$0\le k\le 8$.

**51**．解：（1）由条件知 $f(2)=4a+2b+c\ge 2$ 恒成立

又∵取 $x$=2 时，$f(2)=4a+2b+c\le \frac{1}{8}(2+2)^2=2$ 与恒成立

$\therefore f(2)=2$ …………4 分

（2）∵$\begin{cases}4a+2b+c=2\\4a-2b+c=0\end{cases}$ $\therefore 4a+c=2b=1,\ \therefore b=\frac{1}{2},\qquad c=1-4a$ ……2 分

又 $f(x)\ge x$ 恒成立，即 $ax^2+(b-1)x+c\ge 0$ 恒成立

$\therefore a>0,\Delta=(\frac{1}{2}-1)^2-4a(1-4a)\le 0$， …………2 分

解出：$a=\frac{1}{8},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ …………2 分

（3）由分析条件知道，只要 $f(x)$ 图象（在 y 轴右侧）总在直线 $y=\frac{m}{2}x+\frac{1}{4}$ 上方即可，也就是直线的斜率 $\frac{m}{2}$ 小于直线与抛物线相切时的斜率位置，于是：

$\begin{cases}y=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\y=\frac{m}{2}x+\frac{1}{4}\end{cases}$ 利用相切时△=0，解出 $m=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ …………4 分

$\therefore m\in(-\infty,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ …………2 分

解法 2：$g(x)=\frac{1}{8}x^2+(\frac{1}{2}-\frac{m}{2})x+\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 必须恒成立

即 $x^2+4(1-m)x+2>0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立

①△<0，即 $[4(1-m)]^2-8<0$，解得：$1-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……2 分

②$\begin{cases}\Delta\ge 0\\-2(1-m)\le 0\\f(0)=2>0\end{cases}$ 解出：$m\le 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ …………2 分

总之，$m\in(-\infty,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

**52**．证明：（1）必要性 若$\{b_n\}$为等差数列，设首项 $b_1$，公差 d

则$a_n=\frac{1}{n}(nb_1+\frac{n(n-1)}{2}d)=b_1+\frac{n-1}{2}d$

$\because a_{n+1}-a_n=\frac{d}{2}$，　$\therefore\{a_n\}$为是公差为$\frac{d}{2}$的等差数列 ……4 分

充分性　若$\{a_n\}$为等差数列，设首项$a_1$，公差 d

则$b_1+b_2+\cdots+b_n=n[a_1+(n-1)d]=dn^2+(a_1-d)n$

$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=d(n-1)^2+(a_1-d)(n-1)\qquad(n\geq 2)$

$\therefore b_n=2dn+(a_1-2d)\qquad(n\geq 2)$

当 n=1 时，$b_1=a_1$也适合

$\because b_{n+1}-b_n=2d$，$\therefore\{b_n\}$是公差为 2d 的等差数列　…………4 分

（2）结论是：$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\{c_n\}$为等差数列且$b_n=b_{n+1}$

其中$b_n=a_n-a_{n+2}$　（n=1，2，3…）　…………4 分

**53**（本小题满分 12 分）

解:（I）$S_3=5$，即前 3 局甲 2 胜 1 平.　……………………………………………1 分

由已知甲赢的概率为$\frac{1}{2}$，平的概率为$\frac{1}{6}$，输的概率为$\frac{1}{3}$，　………………………….2 分

得$S_3=5$得概率为$C_3^2(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$.　………………………………………………5 分

（II）$S_\xi=7$时，$\xi=4,5$，且最后一局甲赢，　……………………………………...6 分

$P(\xi=4)=C_3^1(\frac{1}{6})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{16}$；　……………………………………………8 分

$P(\xi=5)=C_4^1(\frac{1}{2})(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{2})+C_3^1(\frac{1}{3})C_3^1(\frac{1}{6})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{216}+\frac{1}{12}=\frac{19}{216}$.

$\xi$的分布列为

| $\xi$ | 4 | 5 |
|---|---|---|
| $P_\xi$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{19}{216}$ |

……………10 分

$\therefore$

$E\xi=4\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{216}=\frac{149}{216}$.　……………………………………12 分

**54**（本小题满分 12 分）

解：（I）由$x^2=4y$得$y=\frac{1}{4}x^2$，　$\therefore y'=\frac{1}{2}x$.

$\therefore$ 直线$l$的斜率为$y'|_{x=2}=1$，故$l$的方程为$y=x-1$，　$\therefore$点 A 的坐标为（1，0）.

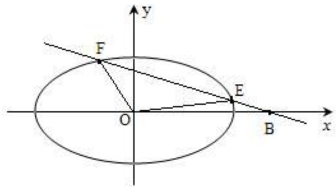
设$M(x,y)$，则$\overrightarrow{AB}=$（1，0），$\overrightarrow{BM}=(x-2,y)$，$\overrightarrow{AM}=(x-1,y)$，

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\sqrt{2}\left|\overrightarrow{AM}\right|=0$ 得 $(x-2)+y\cdot 0+\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0$，

整理，得 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ∴动点 $M$ 的轨迹 C 为以原点为中心，焦点在 $x$ 轴上，长轴长为 $2\sqrt{2}$，短轴长为 2 的椭圆.

(II) 如图，由题意知 $l'$ 的斜率存在且不为零，

设 $l'$ 方程为 $y=k(x-2)(k\neq 0)$ ①，




将①代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，整理，得

$(2k^2+1)x^2-8k^2\cdot x+(8k^2-2)=0$，由 $\Delta>0$ 得 $0<k^2<\dfrac{1}{2}$.

设 $E(x_1,y_1)$、$F(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{2k^2+1}, \\ x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1} \end{cases}$ ②

令 $\lambda=\dfrac{S_{\Delta OBE}}{S_{\Delta OBF}}$， 则 $\lambda=\dfrac{|BE|}{|BF|}$，

由此可得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\cdot\overrightarrow{BF}$，$\lambda=\dfrac{x_1-2}{x_2-2}$，且 $0<\lambda<1$.

由②知 $(x_1-2)+(x_2-2)=\dfrac{-4}{1+2k^2}$，

$(x_1-2)\cdot(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=\dfrac{2}{1+2k^2}$.

∴ $\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}=\dfrac{2k^2+1}{8}$，即 $k^2=\dfrac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{1}{2}$.

∵ $0<k^2<\dfrac{1}{2}$，∴ $0<\dfrac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$，

解得 $3-2\sqrt{2}<\lambda<3+2\sqrt{2}$.

又∵ $0<\lambda<1$， ∴ $3-2\sqrt{2}<\lambda<1$，

∴ΔOBE 与ΔOBF 面积之比的取值范围是（$3-2\sqrt{2}$， 1）.

**55**(1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{a_2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 相减得

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$ 则 $k_{AB}\cdot\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=-\frac{b^2}{a^2}$ 即 $a^2=2b^2$ 故 $b^2=c^2$

由双曲线定义知离心率 $e=\frac{\sqrt{(2-4)^2+2^2}}{|\frac{a^2}{c}-4|}=\frac{2}{|a-2\sqrt{2}|}$

(2)由上知椭圆离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.故 $e=\frac{2}{|a-2\sqrt{2}|}=\sqrt{2}$ 则 $a=3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$

当 $a=3\sqrt{2}$ 时,椭圆方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

当 $a=\sqrt{2}$ 时,椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.而此时 $M(2,1)$ 在椭圆外. 故舍去.

则所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

(3)由题设知 $AB:y=-x+3$.椭圆 $x^2+2y^2-a^2=0$

$\begin{cases}y=-x+3\\x^2+2y^2-a^2=0\end{cases}$ 得 $3x^2-12x+18-a^2=0$ 有 $\Delta=12^2-12(18-a^2)>0$ 故 $a>\sqrt{6}$

又由(2)知 $e=\frac{2}{|a-2\sqrt{2}|}>1$ 即 $\begin{cases}|a-2\sqrt{2}|<2\\a-2\sqrt{2}\neq0\end{cases}$ 故 $a$ 的范围是 $(\sqrt{6},2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$.

则长轴 $2a$ 的范围是 $(2\sqrt{6},4\sqrt{2})\cup(4\sqrt{2},4+4\sqrt{2})$.

56、解：(1) $-\frac{1}{a_{n+1}}=f(a_n)=-\sqrt{4+\frac{1}{a_n{}^2}}$ 且 $a_n>0$ $\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{4+\frac{1}{a_n{}^2}}$

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}{}^2}-\frac{1}{a_n{}^2}=4(n\in N^*)$ n $\therefore$数列 $\{\frac{1}{a_n{}^2}\}$ 是等差数列，首项 $\frac{1}{a_n{}^2}=1$ 公差 d=4

$\therefore\frac{1}{a_n{}^2}=1+4(n-1)$ $\therefore a_n{}^2=\frac{1}{4n-3}$

$\because a_n>0$ $\therefore a_n=\frac{1}{\sqrt{a_n-3}}(n\in N^*)$…………（4 分）

(2)由 $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}},\frac{T_{n+1}}{a_n{}^2}=16n^2-8n-3$

得 $(4n-3)T_{n+1}=(4n+1)T_n+(4n-3)(4n+1)$

$\therefore \dfrac{T_{n+1}}{4n+1}-\dfrac{T_n}{4n-3}=1$ $\quad\therefore \dfrac{T_n}{4n-3}=T_1+n-1$ $\quad\therefore T_n=(4n-3)(T_1+n-1)$

若 $\{b_n\}$ 为等差数列，则 $T_1-1=0, T_1=1$ 即 $b_1=1$ $\quad\therefore b_n=8n-7 \quad n\in N^*$

(3) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$ $\quad\therefore a_n=\dfrac{2}{2\sqrt{4n-3}}>\dfrac{2}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1}}=\dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{2}$

$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{9}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{4n+1}-1 \qquad n\in N^*$……………………12 分

57、解：（1）$na_{n+1}-(n-1)a_n=a_n+2n, \quad a_{n+1}-a_n=2(n\geq 2)$

$a_1=2, a_2=s_1+2, \quad \therefore a_2-a_1=2,$ 所以 $\{a_n\}$ 等差 $a_n=2n$

（2）$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{2n}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}, T_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$

$\dfrac{1}{2}T_n=2-(n+2)\dfrac{1}{2^n}, T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

58、解：（Ⅰ）设 P（$x$，y）是函数 $y=f(x)$ 图象上的任意一点，它在函数 $y=g(x)$ 图象上的对应

点 $P'(x',y')$，则由平移公式，得 $\begin{cases} x'=x+\dfrac{1}{a} \\ y'=y-\dfrac{1}{2a} \end{cases}$ …………2 分

$\therefore \begin{cases} x=x'-\dfrac{1}{a} \\ y=y'+\dfrac{1}{2a} \end{cases}$ 代入函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-a$ 中，得

$y'+\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{2}a(x'-\dfrac{1}{a})^2-a.$ ………………2 分

$\therefore$ 函数 $y=g(x)$ 的表达式为 $g(x)=\dfrac{1}{2}a(x-\dfrac{1}{a})^2-a-\dfrac{1}{2a}.$ …………1 分

（Ⅱ）函数 $g(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{1}{a}>0.$

①当$0<\frac{1}{a}<\sqrt{2}$即$a>\frac{\sqrt{2}}{2}$时，函数$g(x)$在[$\sqrt{2}$,2]上为增函数，

$\therefore h(a)=g(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ ………………2 分

②当$\sqrt{2}\le\frac{1}{a}\le 2$即$\frac{1}{2}\le a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$h(a)=g(\frac{1}{a})=-a-\frac{1}{2a}$.

$\therefore h(a)=-a-\frac{1}{2a}=-(a+\frac{1}{2a})\le -2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2a}}=-\sqrt{2}$

当且仅当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号； …………2 分

③当$\frac{1}{a}>2$即$0<a<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$在[$\sqrt{2}$,2]上为减函数，

$\therefore h(a)=g(2)=a-2<\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$. …………2 分

综上可知，$h(a)=\begin{cases}-\sqrt{2},a>\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -a-\frac{1}{2a},\frac{1}{2}\le a\le\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a-2,0<a<\frac{1}{2}\end{cases}$.

$\therefore$当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，函数$h(a)$的最大值为 $h(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$.

59、（1）证明：过 $B_1$ 点作 $B_1O\perp BA$。∵侧面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC

∴$A_1O\perp$面 ABC ∴$\angle B_1BA$ 是侧面 $BB_1$ 与底面 ABC 倾斜角

∴$\angle B_1BO=\frac{\pi}{3}$ 在 Rt△$B_1OB$ 中，$BB_1=2$，∴$BO=\frac{1}{2}BB_1=1$

又∵$BB_1=AB$，∴$BO=\frac{1}{2}AB$ ∴O 是 AB 的中点。

即点 $B_1$ 在平面 ABC 上的射影 O 为 AB 的中点 …………4 分

（2）连接 $AB_1$ 过点 O 作 $OM\perp AB_1$，连线 CM，OC，

∵$OC\perp AB$，平面 $ABC\perp$平面 $AA_1BB_1$ ∴$OC\perp$平面 AABB。

∴OM 是斜线 CM 在平面 $AA_1B_1B$ 的射影 ∵$OM\perp AB_1$

∴$AB_1\perp CM$ ∴$\angle OMC$ 是二面角 C—$AB_1$—B 的平面角

在 Rt△OCM 中，OC=$\sqrt{3}$，OM=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore \tan\angle OMC=\frac{OC}{OM}=2$

∴$\angle OMC$=cosC+sin2

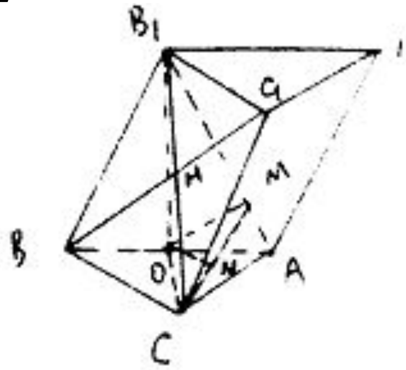
∴二面角 C—$AB_1$—B 的大小为 arctan 2. …………8 分

（3）过点 O 作 $ON\perp CM$，∵$AB_1\perp$平面 OCM，∴$AB_1\perp ON$

$\therefore$ON⊥平面 $AB_1C$。$\therefore$ON 是 O 点到平面 $AB_1C$ 的距离

$$在Rt\Delta OMC中,OC=\sqrt{3},OM=\frac{\sqrt{3}}{2}.\therefore CM=\sqrt{3+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$\therefore ON=\frac{OM\cdot OC}{CM}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$




连接 $BC_1$ 与 $B_1C$ 相交于点 H，则 H 是 $BC_1$ 的中点

$\therefore$B 与 $C_1$ 到平面 $ACB_1$ 的相导。

又$\because$O 是 AB 的中点 $\therefore$B 到平面 $AB_1C$ 的距离

是 O 到平面 $AB_1C$ 距离的 2 倍

是 G 到平面 $AB_1C$ 距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.　　…………12 分

60、解：（1）证明取 $SC$ 的中点 $R$，连 $QR, DR$.　由题意知：$PD // BC$ 且 $PD=\frac{1}{2}BC$;

$QR // BC$ 且 $QP=\frac{1}{2}BC$,　　$\therefore QR // PD$ 且 $QR=PD$.

$\therefore PQ // DR$, 又 $PQ\not\subset$ 面 $SCD$,　　$\therefore PQ //$ 面 $SCD$.　　…………（6 分）

（2）法一：连接 $SP$，$\because SP\perp AD,面SCD\perp面ABCD,\ \therefore SP\perp面ABCD.$

取$PB$的中点$H$，连$QH$，得$QH \quad SP$, $\therefore QH\perp面ABCD$ .

作$HG\perp PC$于$G$,连$QG$, 由三垂线定理知：$\angle QGH$即为所求二面角的平面角.

$$而QH=\frac{1}{2}SP=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$在\Delta PBC中，\angle PBC=90^\circ,PB=\frac{\sqrt{3}}{2}a,BC=a\therefore PC=\frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

$$\therefore HG=PH\cdot\sin\angle BPC=\frac{\sqrt{3}}{4}a\times\frac{a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}a\ .\ \ \therefore\tan\angle QGH=\frac{QH}{HG}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}a}=\frac{\sqrt{7}}{2}\ ,$$

$\therefore$二面角$B-PC-Q$的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{7}}{2}$.　　　…………（12 分）

（2）法二：以 $P$ 为坐标原点，$PA$ 为 $x$ 轴，$PB$ 为 $y$ 轴，$PS$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系，

则 $S$（$0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a$），$B$（$0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0$）,$C$（$-a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0$），$Q$（$0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a$）.

面 $PBC$ 的法向量为 $\overrightarrow{PS}=$（$0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a$）,设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为面 $PQC$ 的一个法向量，

$$由\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{4}ay+\frac{\sqrt{3}}{4}az=0\\ -ax+\frac{\sqrt{3}}{4}ay=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(\frac{3}{2},\sqrt{3},-\sqrt{3}),$$

$\cos < \vec{n}, \overrightarrow{PS} >= \dfrac{-\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{33}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{11}} = -\dfrac{2}{11}\sqrt{11}$，

$\therefore$二面角$B-PC-Q$的大小为 $\arccos\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. …………（12 分）

61.（本小题满分 16 分）

（1）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差是 d，则 $a_1+2d=4$，$3a_1+3d=18$，解得 $a_1=8$，$d=-2$，

所以 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = -n^2 + 9n$ ……………………………………2 分

由 $\dfrac{S_n + S_{n+2}}{2} - S_{n+1} = \dfrac{1}{2}[(-n^2+9n)-(n+2)^2+9(n+2)+2(n+1)^2-18(n+1)]$ =－1＜0

得 $\dfrac{S_n + S_{n+2}}{2} < S_{n+1}$，适合条件①；

又 $S_n = -n^2+9n = -(n-\dfrac{9}{2})^2 + \dfrac{81}{4}$ 所以当 n=4 或 5 时，$S_n$取得最大值 20，即 $S_n$≤20，适合条件②

综上，$\{S_n\}\in W$…………………………………………………4 分

（2）解：因为 $b_{n+1} - b_n = 5(n+1) - 2^{n+1} - 5n + 2^n = 5 - 2^n$

所以当 n≥3 时，$b_{n+1} - b_n < 0$，此时数列$\{b_n\}$单调递减；

当 $n$=1，2 时，$b_{n+1} - b_n > 0$，即 $b_1<b_2<b_3$，因此数列$\{b_n\}$中的最大项是 $b_3=7$

所以 M≥7……………………………………………………8 分

（3）解：假设存在正整数 k，使得 $c_k > c_{k+1}$ 成立

由数列$\{c_n\}$的各项均为正整数，可得 $c_k \ge c_{k+1} + 1$即$c_{k+1} \le c_k - 1$

因为 $\dfrac{c_k + c_{k+2}}{2} \le c_{k+1}$，所以$c_{k+2} \le 2c_{k+1} - c_k \le 2(c_k - 1) - c_k = c_k - 2$

由 $c_{k+2} \le 2c_{k+1} - c_k$及$c_k > c_{k+1}$，得$c_{k+2} < 2c_{k+2} - c_{k+1} = c_{k+1}$，故$c_{k+2} \le c_{k+1} - 1$

因为 $\dfrac{c_{k+1} + c_{k+3}}{2} \le c_{k+2}$，所以$c_{k+3} \le 2c_{k+2} - c_{k+1} \le 2(c_{k+1} - 1) - c_{k+1} = c_{k+1} - 2 \le c_k - 3$

……………………依次类推，可得 $c_{k+m} \le c_k - m (m \in N^*)$

设 $c_k = p (p \in N^*)$，则当$m = p$时，有$c_{k+p} \le c_k - p = 0$

这显然与数列$\{c_n\}$的各项均为正整数矛盾！

所以假设不成立，即对于任意 n∈$N^*$，都有 $c_n \le c_{n+1}$ 成立.（ 16 分）

**62**．（本题满分 14 分）数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$（$n\in \mathbf{N}_+$）由下列条件确定：

（1）$a_1<0$，$b_1>0$；（2）当$k\ge 2$时，$a_k$与$b_k$满足如下条件：当$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\ge 0$时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$；当$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$时，$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，$b_k=b_{k-1}$.

解答下列问题：（Ⅰ）证明数列$\{a_k-b_k\}$是等比数列；

（Ⅱ）记数列$\{n(b_k-a_n)\}$的前$n$项和为$S_n$，若已知当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

（Ⅲ）$n(n\ge 2)$是满足$b_1>b_2>\cdots>b_n$的最大整数时，用$a_1$，$b_1$表示$n$满足的条件.

解：（Ⅰ）当$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\ge 0$时，$b_k-a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}-a_{k-1}=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$，

当$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$时，$b_k-a_k=b_{k-1}-\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$，

所以不论哪种情况，都有$b_k-a_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$，又显然$b_1-a_1>0$，

故数列$\{a_k-b_k\}$是等比数列….（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n-a_n=(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^{n-1}$，故$n(b_n-a_n)=(b_1-a_1)\cdot\frac{n}{2^{n-1}}$，

$S_n=(b_1-a_1)(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}})$，所以$\frac{1}{2}S_n=(b_1-a_1)(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n})$

所以$\frac{1}{2}S_n=(b_1-a_1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n})$，$S_n=(b_1-a_1)[4(1-\frac{1}{2^n})-\frac{2n}{2^n}]$，…（7 分）

又当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=4(b_1-a_1)$.（8 分）

（Ⅲ）当$b_1>b_2>\cdots>b_n(n\ge 2)$时，$b_k\ne b_{k-1}$ $(2\le k\le n)$，由（2）知$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$不成立，故$\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\ge 0$，从而对于$2\le k\le n$，有$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，于是$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1$，故$b_n=a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^{n-1}$，…………（10 分）

$\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{1}{2}\left\{a_1+[a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^{n-1}]\right\}=a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^n$.若$\frac{a_n+b_n}{2}\ge 0$，则$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，

$b_{n+1}-b_n=\left\{a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^n\right\}-\left\{a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^{n-1}\right\}=-(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^n<0$，所以$b_n>b_{n+1}$，这与$n$是满足$b_1>b_2>\cdots>b_n(n\ge 2)$的最大整数矛盾.因此$n$是满足$\frac{a_n+b_n}{2}<0$的最小整数.（12 分）

而$\frac{a_n+b_n}{2}<0\Leftrightarrow a_1+(b_1-a_1)(\frac{1}{2})^n<0\Leftrightarrow\frac{b_1-a_1}{-a_1}<2^n\Leftrightarrow\log_2\frac{a_1-b_1}{a_1}<n$，

因而，$n$是满足$\log_2 \frac{a_1-b_1}{a_1}<n$的最小整数.（14 分）

**63.** (1) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+a=\frac{ax^2+x-1}{x^2}$

当 $a$≥0 时，$ax^2+x-1$在[2，+∞)上恒大于零，即$f'(x)>0$，符合要求； 2 分

当 $a$<0 时，令$g(x)=ax^2+x-1$，$g(x)$在[2，+∞)上只能恒小于零

故△＝1＋4$a$≤0 或$\begin{cases}1+4a>0\\ g(2)\le 0\\ -\frac{1}{2a}\le 2\end{cases}$，解得：$a\le -\frac{1}{4}$

∴$a$的取值范围是$(-\infty,-\frac{1}{4}]\cup[0,+\infty)$ 6 分

(2) $a$ = 0 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$

当 0<$x$<1 时$f'(x)<0$，当 $x$>1 时$f'(x)>0$，∴$f(x)_{\min}=f(1)=1$ 8 分

(3)反证法：假设 $x_1$ = $b$>1，由(2)$\ln\frac{x_n}{b}+\frac{b}{x_n}\ge 1>\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}$，

∴$\frac{b}{x_n}>\ln b+\frac{1}{x_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$

故$1=\frac{b}{x_1}>\ln b+\frac{1}{x_2}>\ln b+\frac{1}{b}(\ln b+\frac{1}{x_3})>\ln b+\frac{\ln b}{b}+\frac{1}{b^2}(\ln b+\frac{1}{x_4})>\cdots$

$>(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}+\cdots)\ln b=\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\ln b$，即$\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\ln b<1$ ①

又由(2)当 $b$>1 时，$\ln b+\frac{1}{b}>1$，∴$\ln b>1-\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\ln b>1$

与①矛盾，故 $b$≤1，即 $x_1$≤1，同理可证 $x_2$≤1，$x_3$≤1，…，$x_n$≤1($n$∈$\mathbf{N}^*$) 14 分

**64.** 解：（Ⅰ）$f'(x)=3x^2+2ax+b$。依题意则有：

$\begin{cases}f(1)=4\\ f'(1)=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}1+a+b=4\\ 3+2a+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-6\\ b=9\end{cases}$，所以$f(x)=x^3-6x^2+9x$；

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，由$f'(x)=0$可得$x=1$或$x=3$。

$f'(x),f(x)$在区间$(0,4]$上的变化情况为：

| $x$ | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,3)$ | 3 | $(3,4)$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | — | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | 增函数 | 4 | 减函数 | 0 | 增函数 | 4 |

所以函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值是 4，最小值是 0。

（Ⅱ）由函数的定义域是正数知，$s>0$，故极值点 $(3,0)$ 不在区间 $[s,t]$ 上；

（1）若极值点 $M(1,4)$ 在区间 $[s,t]$，此时 $0<s\leqslant 1\leqslant t<3$，在此区间上 $f(x)$ 的最大值是 4，不可能等于 $t$；故在区间 $[s,t]$ 上没有极值点；

（2）若 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在 $[s,t]$ 上单调增，即 $0<s<t\leqslant 1$ 或 $3<s<t$，

则 $\begin{cases} f(s)=s \\ f(t)=t \end{cases}$，即 $\begin{cases} s^3-6s^2+9s=s \\ t^3-6t^2+9t=t \end{cases}$，解得 $\begin{cases} s=2 \\ t=4 \end{cases}$ 不合要求；

（3）若 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在 $[s,t]$ 上单调减，即 $1\leqslant s<t\leqslant 3$，则 $\begin{cases} f(s)=t \\ f(t)=s \end{cases}$，

两式相减并除 $s-t$ 得：$(s+t)^2-6(s+t)-st+10=0$，　　①

两式相除并开方可得 $[s(s-3)]^2=[t(t-3)]^2$，

即 $s(3-s)=t(3-t)$，整理并除以 $s-t$ 得：$s+t=3$，　　②

则①、②可得 $\begin{cases} s+t=3 \\ st=1 \end{cases}$，即 $s,t$ 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根，

即存在 $s=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 满足要求；

（Ⅲ）同（Ⅱ），极值点 $(3,0)$ 不可能在区间 $[s,t]$ 上；

（1）若极值点 $M(1,4)$ 在区间 $[s,t]$，此时 $0<s\leqslant 1\leqslant t<3$，

故有① $\begin{cases} 0<s\leqslant 1\leqslant t<3 \\ kt=4 \\ ks=f(s) \\ f(s)\leqslant f(t) \end{cases}$ 或② $\begin{cases} 0<s\leqslant 1\leqslant t<3 \\ kt=4 \\ ks=f(t) \\ f(s)\geqslant f(t) \end{cases}$

①由 $k=\dfrac{4}{t}$，$1\leqslant t<3$ 知，$k\in(\dfrac{4}{3},4]$，当且仅当 $t=1$ 时，$k=4$；

再由 $k=(s-3)^2$，$0<s\leqslant 1$ 知，$k\in[4,9]$，当且仅当 $s=1$ 时，$k=4$

由于 $s\neq t$，故不存在满足要求的 $k$ 值。

②由 $s=\dfrac{1}{k}f(t)=\dfrac{t}{4}f(t)=[\dfrac{t(3-t)}{2}]^2$，及 $0<s\leqslant 1$ 可解得 $2\leqslant t<3$，

所以 $k=\dfrac{4}{t}$，$2\leqslant t<3$ 知，$k\in(\dfrac{4}{3},2]$；

即当$k\in(\frac{4}{3},2]$时，存在$t=\frac{4}{k}\in[2,3)$，$s=\frac{1}{k}f(t)=\frac{t}{4}f(t)=[\frac{t(3-t)}{2}]^2\in(0,1]$，

且$f(s)\geqslant 4s=\frac{4}{k}f(t)>f(t)$，满足要求。

（2）若函数$f(x)$在区间$[s,t]$单调递增，则$0<s<t\leqslant 1$或$3<s<t$，

且$\begin{cases}f(s)=ks\\f(t)=kt\end{cases}$，故$s,t$是方程$x^2-6x+9=k$的两根，

由于此方程两根之和为3，故$[s,t]$不可能同在一个单调增区间；

（3）若函数$f(x)$在区间$[s,t]$单调递减，即$1\leqslant s<t\leqslant 3$，$\begin{cases}f(s)=kt\\f(t)=ks\end{cases}$，

两式相除并整理得$s^2(s-3)^2=t^2(t-3)^2$，由$1<s<t<3$知$s(s-3)=t(t-3)$，即$s+t=3$，

再将两式相减并除以$s-t$得，

$-k=(s^2+st+t^2)-6(s+t)+9=(s+t)^2-6(s+t)+9-st=-st$，

即$k=st<(\frac{s+t}{2})^2=\frac{9}{4}$。即$k\in(0,\frac{9}{4})$，$s,t$是方程$x^2-3x+k=0$的两根，

即存在$s=\frac{3-\sqrt{9-4k}}{2}$，$s=\frac{3+\sqrt{9-4k}}{2}$满足要求。

综上可得，当$0<k<\frac{9}{4}$时，存在两个不等正数$s,t$ $(s<t)$，使$x\in[s,t]$时，函数$f(x)=x^3-6x^2+9x$的值域恰好是$[ks,kt]$。

**65.** 解：（1）$a_2=2,a_3=3,a_4=4$

（2）$na_{n+1}=2(a_1+a_2+...+a_n)$　　①

$(n-1)a_n=2(a_1+a_2+...+a_{n-1})$　　②

①—②得$na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n$，即：$na_{n+1}=(n+1)a_n$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$

所以$a_n=a_1\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}...\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\frac{2}{1}\frac{3}{2}...\frac{n}{n-1}=n(n\geq 2)$，所以$a_n=n(n\in N^*)$

（3）由（2）得：$b_1=\frac{1}{2},b_{n+1}=\frac{1}{k}b_n^2+b_n>b_n>b_{n-1}>...>b_1>0$，

所以$\{b_n\}$是单调递增数列，故要证：$b_n<1(n\le k)$只需证$b_k<1$

若$k=1$，则$b_1=\frac{1}{2}<1$显然成立；若$k\ge 2$，则$b_{n+1}=\frac{1}{k}b_n^2+b_n<\frac{1}{k}b_nb_{n+1}+b_n$，

所以$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}>-\frac{1}{k}$，因此：$\frac{1}{b_k}=(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k-1}})+\ldots+(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_1})+\frac{1}{b_1}>-\frac{k-1}{k}+2=\frac{k+1}{k}$

所以$b_k<\frac{k}{k+1}<1$，所以$b_n<1(n\le k)$。

66、（1）函数的定义域为$\left(-1,+\infty\right)$, $f'(x)=2\left[(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]=\frac{2x(x+2)}{x+1}$. 1 分

由$f'(x)>0$得$x>0$； 2 分

由$f'(x)<0$得$-1<x<0$， 3 分

则增区间为$(0,+\infty)$,减区间为$(-1,0)$. 4 分

(2)令$f'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}=0$, 得$x=0$,由(1)知$f(x)$在$\left[\frac{1}{e}-1,0\right]$上递减,在$\left[0,e-1\right]$上递增, 6 分

由$f\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{1}{e^2}+2$, $f(e-1)=e^2-2$,且$e^2-2>\frac{1}{e^2}+2$， 8 分

$\therefore x\in\left[\frac{1}{e}-1,e-1\right]$时, $f(x)$ 的最大值为$e^2-2$,故$m>e^2-2$时,不等式$f(x)<m$恒成立. 9 分

(3)方程$f(x)=x^2+x+a$, 即$x+1-2\ln(1+x)=a$.记$g(x)=x+1-2\ln(1+x)$,则

$g'(x)=1-\frac{2}{1+x}=\frac{x-1}{x+1}$.由$g'(x)>0$得$x>1$;由$g'(x)<0$得$-1<x<1$.

所以$g(x)$在$[0,1]$上递减;在$[1,2]$上递增.

而$g(0)=1, g(1)=2-2\ln 2, g(2)=3-2\ln 3$, $\therefore g(0)>g(2)>g(1)$ 10 分

所以,当$a>1$时,方程无解;
当$3-2\ln 3<a\le 1$时，方程有一个解;
当$2-2\ln 2<a\le 3-2\ln 3$时,方程有两个解;
当$a=2-2\ln 2$时,方程有一个解;
当$a<2-2\ln 2$时,方程无解. 13 分

综上所述,$a\in(1,+\infty)\cup(-\infty,2-2\ln 2)$时,方程无解;

$a\in(3-2\ln 3,1]$或$a=2-2\ln 2$时,方程有唯一解;

$a\in(2-\ln 2,3-2\ln 3]$时,方程有两个不等的解.　　　　　　14 分

67、解：（1）当$a=1$时,$\Phi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}$,　　$\Phi'(x)=e^{-x}(-x^2+x)$. …（1 分）

当$\Phi'(x)>0$时,$0<x<1$;　当$\Phi'(x)<0$时,$x>1$或$x<0$.　　　　……（3 分）

∴ $\Phi(x)$的单调递增区间为（0，1），单调递减区间为：$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$.

……（4 分）

（2）切线的斜率为$k=g'(0)=-e^{-x}|_{x=0}=-1$，

∴ 切线方程为$y=-x+1$. ……（6 分）

所求封闭图形面积为

$$S=\int_0^1[e^{-x}-(-x+1)]dx=\int_0^1(e^{-x}+x-1)dx=(-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x)|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}.$$

……（8 分）

（3）$\Phi'(x)=(2x+a)e^{-x}-e^{-x}(x^2+ax+a)=e^{-x}[-x^2+(2-a)x]$，　　　……（9 分）

令$\Phi'(x)=0$,得$x=0$或$x=2-a$.　　　　　　　　……（10 分）

列表如下：

| x | （－∞，0） | 0 | （0，2－a） | 2－a | （2－a，＋∞） |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi'(x)$ | － | 0 | ＋ | 0 | － |
| $\Phi(x)$ | ↘ | 极小 | ↗ | 极大 | ↘ |

由表可知，$\Phi(x)_{极大}=\Phi(2-a)=(4-a)e^{a-2}$.　　　　……（12 分）

设$\mu(a)=(4-a)e^{a-2}$，$\mu'(a)=(3-a)e^{a-2}>0$，

∴ $\mu(a)$在$(-\infty,2)$上是增函数，……（13 分）

∴ $\mu(a)\le\mu(2)=2<3$，即$(4-a)e^{a-2}\ne 3$，

∴不存在实数 a，使$\Phi(x)$极大值为 3.　　　　……（14）

68、解：（1）由$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$,得$\frac{b^2}{a^2}=1-e=\frac{2}{3}$;　　　　　　　　（2 分）

由直线$l:x-y+2=0$与圆$x^2+y^2=b^2$相切,得$\frac{2}{\sqrt{2}}=|b|$.所以,$b=\sqrt{2},a=\sqrt{3}$

所以椭圆的方程是$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.　　　　　　　　（4 分）

（2）由条件，知$|MF_2|=|MP|$。即动点 M 到定点 $F_2$ 的距离等于它到直线$l_1:x=-1$的距离，由抛物线的定义得点 M 的轨迹 $C_2$ 的方程是$y^2=4x$。　　　　（8 分）

（3）由（2），知 Q（0，0）。设$R(\frac{y_1^2}{4},y_1),S(\frac{y_2^2}{4},y_2)$,所以$\overrightarrow{QR}=(\frac{y_1^2}{4},y_1)$

$\overrightarrow{RS}=(\frac{y_2^2-y_1^2}{4},y_2-y_1)$.

由$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{RS}=0$,得$\frac{y_1^2(y_2^2-y_1^2)}{16}+y_1(y_2-y_1)=0$.

因为$y_1\neq y_2$,化简得$y_2=-y_1-\frac{16}{y_1}$………………(10分)

$\therefore y_2^2=y_1^2+\frac{256}{y_1^2}+32\geq 2\sqrt{256}+32=64$(当且仅当$y_1^2=\frac{256}{y_1^2}$,即

$y_1=\pm4$时等号成立).……………(12分)

$\because|\overrightarrow{QS}|=\sqrt{(\frac{y_2^2}{4})^2+y_2^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(y_2^2+8)^2-64}$,$\because y_2^2\geq 64$.

所以当$y_2^2=64$,即$y_2=\pm8$时,$|\overrightarrow{QS}|_{\min}=8\sqrt{5}$.

故$|\overrightarrow{QS}|$的取值范围是$\left[8\sqrt{5}.+\infty\right)$。

69、解：（1）由已知，点P$(-\sqrt{2},1)$在椭圆上　∴有$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$　　①--------------1 分

又$\because\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{F_2M}=0$，M在y轴上，∴M为P、$F_2$的中点，--------------2 分

$\therefore -\sqrt{2}+c=0,c=\sqrt{2}$. -----------3 分　∴由$a^2-b^2=2$，　②-----------4 分

解①②,解得$b^2=2$（$b^2=-1$舍去），$\therefore a^2=4$

故所求椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$。----6 分

（2）∵点$M(x_0,y_0)$关于直线$y=2x$的对称点为$M_1(x_1,y_1)$，

$\therefore\begin{cases}\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\times2=-1,\\ \frac{y_0+y_1}{2}=2\times\frac{x_0+x_1}{2}.\end{cases}$ -----------8 分　　解得$\begin{cases}x_1=\frac{4y_0-3x_0}{5}\\ y_1=\frac{3y_0-4x_0}{5}\end{cases}$--------------10 分

$\therefore 3x_1-4y_1=-5x_0$.---------------------11 分

∵点P$(x_0,y_0)$在椭圆C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$上，$\therefore -2\leq x_0\leq 2,\therefore -10\leq -5x_0\leq 10$。

即$3x_1-4y_1$的取值范围为［－10，10］。---------------------------12 分

70、解:(Ⅰ)因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，所以有$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{F_1F_2}$

所以$\Delta AF_1F_2$为直角三角形；$\therefore \left|\overrightarrow{AF_1}\right|\cos\angle F_1AF_2=\left|\overrightarrow{AF_2}\right|$…………………………2 分

则有$9\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=9\left|\overrightarrow{AF_1}\right|\left|\overrightarrow{AF_2}\right|\cos\angle F_1AF_2=9\left|\overrightarrow{AF_2}\right|^2=\overrightarrow{AF_1}^2=\left|\overrightarrow{AF_1}\right|^2$

所以，$\left|\overrightarrow{AF_1}\right|=3\left|\overrightarrow{AF_2}\right|$…………………………3 分

又$\left|\overrightarrow{AF_1}\right|+\left|\overrightarrow{AF_2}\right|=2a$，$\therefore \left|\overrightarrow{AF_1}\right|=\dfrac{3a}{2},\left|\overrightarrow{AF_2}\right|=\dfrac{a}{2}$…………………………4 分

在$\Delta AF_1F_2$中有$\left|\overrightarrow{AF_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{AF_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|^2$

即$\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+4(a^2-1)$，解得$a^2=2$

所求椭圆$M$方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$…………………………6 分

（Ⅱ）$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\left(\overrightarrow{NE}-\overrightarrow{NP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP}\right)$

$=\left(-\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP}\right)=\left(-\overrightarrow{NP}\right)^2-\overrightarrow{NF}^2=\overrightarrow{NP}^2-1$

从而将求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值转化为求$\overrightarrow{NP}^2$的最大值…………………………8 分

$P$是椭圆$M$上的任一点，设$P(x_0,y_0)$，则有$\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1$即${x_0}^2=2-2{y_0}^2$

又$N(0,2)$，所以$\overrightarrow{NP}^2={x_0}^2+(y_0-2)^2=-(y_0-2)^2+10$…………………………10 分

而$y_0\in[-1,1]$,所以当$y_0=1$时，$\overrightarrow{NP}^2$取最大值9

故$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值为8…………………………12 分

**71** 解：（Ⅰ）由已知得

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(m,\sqrt{3}m)\cdot(n,-\sqrt{3}n)\qquad 1分$$

$$=-2mn=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore m\cdot n=\frac{1}{4}\quad …………4 分$$

（Ⅱ）设 P 点坐标为（$x$，$y$）（$x$＞0），由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$得

$(x,y)=(m,\sqrt{3}m)+(n,-\sqrt{3}n)$，$=(m+n,\sqrt{3}(m-n))$ …………5 分

$\therefore\begin{cases}x=m+n\\ y=\sqrt{3}(m-n)\end{cases}$ 消去 m，n 可得

$x^2-\frac{y^2}{3}=4mn$，又因 $mn=\frac{1}{4}$ 　　8 分

∴ P 点的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1\ (x>0)$

它表示以坐标原点为中心，焦点在 $x$ 轴上，且实轴长为 2，焦距为 4 的双曲线

$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支 　　…………9 分

（Ⅲ）设直线 $l$ 的方程为 $x=ty+2$，将其代入 C 的方程得 $3(ty+2)^2-y^2=3$

即 $(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$

易知 $(3t^2-1)\neq 0$（否则，直线 $l$ 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$，它与渐近线平行，不符合题意）

又 $\Delta=144t^2-36(3t^2-1)=36(t^2+1)>0$

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-12t}{3t^2-1},y_1y_2=\frac{9}{3t^2-1}$

∵ $l$ 与 C 的两个交点 $M,N$ 在 y 轴的右侧

$$\begin{aligned}x_1x_2&=(ty_1+2)(ty_2+2)\\&=t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4\\&=t^2\cdot\frac{9}{3t^2-1}+2t\cdot\frac{-12t}{3t^2-1}+4\\&=-\frac{3t^2+4}{3t^2-1}>0\end{aligned}$$

∴ $3t^2-1<0$，即 $0<t^2<\frac{1}{3}$

又由 $x_1+x_2>0$ 同理可得 $0<t^2<\frac{1}{3}$ 　　…………11 分

由 $\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{EN}$ 得 $(2-x_1,-y_1)=3(2-x_2,y_2)$，∴ $\begin{cases}2-x_1=3(2-x_2)\\-y_1=3y_2\end{cases}$

由 $y_1+y_2=-3y_2+y_2=-2y_2=-\frac{12t}{3t^2-1}$ 得 $y_2=\frac{6t}{3t^2-1}$

由 $y_1y_2=(-3y_2)y_2=-3y_2^2=\frac{9}{3t^2-1}$ 得 $y_2^2=-\frac{3}{3t^2-1}$

消去 $y_2$ 得 $\frac{36t^2}{(3t^2-1)^2}=-\frac{3}{3t^2-1}$，解之得：$t^2=\frac{1}{15}$，满足 $0<t^2<\frac{1}{3}$ 　　…………13 分

故所求直线 $l$ 存在，其方程为：$\sqrt{15}x-y-2\sqrt{5}=0$ 或 $\sqrt{15}x+y-2\sqrt{5}=0$ 　　…………14 分

**72.**

22．本题主要考查导数和方程、不等式的基本知识，要求学生能利用导数的方法解决函数的单调性和最值问题，寻找合理的途径，构造函数的方法证明不等式．满分 14 分.

解:：（1）$f'(x)=x+\frac{a}{x},g'(x)=a+1$， ……………………………2 分

$H(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x-(a+1)x$，

$\because f(x),g(x)$ 在区间[1，2]上都为单调函数且它们的单调性相同，

$\therefore f'(x)\cdot g'(x)=\frac{x^2+a}{x}\cdot(a+1)\geq 0$，$\because x\in[1,2]$，$\therefore (a+1)(a+x^2)\geq 0$， …………4 分

$\because -x^2\leq -1, \therefore a\leq -x^2$ 或 $a>-1$（$a\neq -1$），又 $(-x^2)_{\min}=-4$，

$\therefore a\leq -4$ 或 $a>-1$． ……………………………6 分

（2）$\because H'(x)=x+\frac{a}{x}-(a+1)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=a$，

又 $\because x^2-(a+1)x+a=0$ 有两不等正根 $\alpha$、$\beta$ 且 $\alpha<\beta$，$\beta\in(1,e]$，

$\therefore \alpha=1,\beta=a\in(1,e]$， ……………………………8 分

$\therefore$ 当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，$H'(x)\leq 0$，$\therefore H(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调递减，

$\therefore H(x)_{\max}=H(1),H(x)_{\min}=H(\beta)$，

则对任意的 $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$，

$$|H(x_1)-H(x_2)|\leq H(1)-H(\beta)=[\frac{1}{2}-(a+1)]-[\frac{1}{2}a^2+a\ln a-a(a+1)]$$

$$=\frac{1}{2}a^2-a\ln a-\frac{1}{2},$$ ……………………10 分

设 $t(a)=\frac{1}{2}a^2-a\ln a-\frac{1}{2}$，则 $t'(a)=a-1-\ln a$，

$\because$ 当 $a\in(1,e]$ 时，$t''(a)=1-\frac{1}{a}>0$，$\therefore t'(a)$ 在 $(1,e]$ 单调递增， ……………………12 分

$\therefore t'(a)>t'(1)=0$，$\therefore t(a)$ 也在 $(1,e]$ 单调递增，

$\therefore t(a)\leq t(e)=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}=e(\frac{e}{2}-1)-\frac{1}{2}<3(\frac{3}{2}-1)-\frac{1}{2}=1$，

$\therefore$ 不等式 $|H(x_1)-H(x_2)|<1$ 对任意的 $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ 成立． ………………14 分

73 解:（Ⅰ）当 $0<x\leq 1$ 时，$-1\leq -x<0$，则

$f(x)=-f(-x)=2x^3-5ax^2+4a^2x-b$． ……………………………2 分

当 $x=0$ 时，$f(0)=-f(-0)\ \therefore f(0)=0$． ……………………………3 分

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2x^3+5ax^2+4a^2x+b,(-1\leq x<0),\\ 0, \qquad (x=0),\\ 2x^3-5ax^2+4a^2x-b,(0<x\leq 1).\end{cases}$$ ……………………………4 分

（Ⅱ）当 $0<x\leq 1$ 时，

$f'(x)=6x^2-10ax+4a^2=2(3x-2a)(x-a)=6(x-\frac{2a}{3})(x-a)$． ………5 分

(1)当$\frac{2}{3}<\frac{2a}{3}<1$，即$1<a<\frac{3}{2}$时，

当$x\in\left(0,\frac{2a}{3}\right)$时，$f'(x)>0$， 当$x\in\left(\frac{2a}{3},1\right]$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$\left(0,\frac{2a}{3}\right)$单调递增，在$\left(\frac{2a}{3},1\right]$上单调递减，

$\therefore g(a)=f(\frac{2a}{3})=\frac{28}{27}a^3-b$． ……………………………7 分

(2)当$1\le\frac{2a}{3}\le 2$，即$\frac{3}{2}\le a\le 3$时，$f'(x)\ge 0$，$\therefore f(x)$在$(0,1]$单调递增.

$\therefore g(a)=f(1)=4a^2-5a+2-b$， ……………………………9 分

$$\therefore g(a)=\begin{cases}\frac{28}{27}a^3-b, & (1<a<\frac{3}{2}),\\ 4a^2-5a+2-b, & (\frac{3}{2}\le a\le 3).\end{cases}$$ ……………………………10 分

(III) 要使函数$f(x)$在$(0,1]$上恒有$f(x)\le 0$，必须使$f(x)$在$(0,1]$上的最大值$g(a)\le 0$.

也即是对满足$1<a\le 3$的实数$a$，$g(a)$的最大值要小于或等于$0$． ………………11 分

（1）当$1<a<\frac{3}{2}$时，$g'(a)=\frac{28}{9}a^2>0$，此时$g(a)$在$(1,\frac{3}{2})$上是增函数，

则$g(a)<\frac{28}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^3-b=\frac{7}{2}-b$． $\therefore\frac{7}{2}-b\le 0$，解得$b\ge\frac{7}{2}$． ………① ………………12 分

（2）当$\frac{3}{2}\le a\le 3$时，$g'(a)=8a-5>0$，此时，$g(a)$在$\left[\frac{3}{2},3\right]$上是增函数，$g(a)$的最大值是

$g(3)=23-b$．$\therefore 23-b\le 0$，解得$b\ge 23$． ………② ……………………………13 分

由①、②得实数$b$的取值范围是$b\ge 23$． ……………………………14 分

**74 解**：（Ⅰ）设椭圆$C$的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$a^2-b^2=1$． ……①……1 分

$\because$当$l$垂直于$x$轴时，$A,B$两点坐标分别是$(1,\frac{b^2}{a})$和$(1,-\frac{b^2}{a})$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1,\frac{b^2}{a})\cdot(1,-\frac{b^2}{a})=1-\frac{b^4}{a^2}$，则$1-\frac{b^4}{a^2}=\frac{5}{6}$，即$a^2=6b^4$． ………② …3 分

由①，②消去$a$，得$6b^4-b^2-1=0$．$\therefore b^2=\frac{1}{2}$或$b^2=-\frac{1}{3}$（舍去）．

当$b^2=\dfrac{1}{2}$时，$a^2=\dfrac{3}{2}$．因此，椭圆$C$的方程为$\dfrac{2x^2}{3}+2y^2=1$．……………………………5 分

（Ⅱ）设存在满足条件的直线$l$．

(1)当直线$l$垂直于$x$轴时，由（Ⅰ）的解答可知$|AB|=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦点$F$到右准线的距离为

$d=\dfrac{a^2}{c}-c=\dfrac{1}{2}$，此时不满足$d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|AB|$．

因此，当直线$l$垂直于$x$轴时不满足条件．……………………………7 分

（2）当直线$l$不垂直于$x$轴时，设直线$l$的斜率为$k$，则直线$l$的方程为$y=k(x-1)$．

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{2x^2}{3}+2y^2=1\end{cases}\Rightarrow(6k^2+2)x^2-12k^2x+6k^2-3=0$，

设$A,B$两点的坐标分别为$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{6k^2-3}{6k^2+2}$．

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{(1+k^2)[(\frac{6k^2}{3k^2+1})^2-4(\frac{6k^2-3}{6k^2+2})]}=\frac{\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}.$$ ……………………9 分

又设$AB$的中点为$M$，则$x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3k^2}{3k^2+1}$．

当$\Delta ABP$为正三角形时，直线$MP$的斜率为$k_{MP}=-\dfrac{1}{k}$．

$\because x_P=\dfrac{3}{2}$，$\therefore|MP|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}|x_P-x_M|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3k^2}{3k^2+1})=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{k^2}}\cdot\dfrac{3(k^2+1)}{2(3k^2+1)}$．

……………………………11 分

当$\Delta ABP$为正三角形时，$|MP|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，即$\sqrt{\dfrac{1+k^2}{k^2}}\cdot\dfrac{3(k^2+1)}{2(3k^2+1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$，

解得$k^2=1$，$k=\pm1$．……………………………13 分

因此，满足条件的直线$l$存在，且直线$l$的方程为$x-y-1=0$或$x+y-1=0$．……14 分

**75** 解：（Ⅰ）$\because\dfrac{1}{a_n}=(-1)^n-\dfrac{2}{a_{n-1}}$，$\therefore\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n=(-2)[\dfrac{1}{a_{n-1}}+(-1)^{n-1}]$，……………3 分

又$\because \dfrac{1}{a_1}+(-1)=3$，$\therefore$数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$是首项为$3$，公比为$-2$的等比数列．……5 分

$\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n=3(-2)^{n-1}$，　即$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}+1}$．　………………6 分

（Ⅱ）$b_n=(3\cdot 2^{n-1}+1)^2=9\cdot 4^{n-1}+6\cdot 2^{n-1}+1$．

$S_n=9\cdot\dfrac{1\cdot(1-4^n)}{1-4}+6\cdot\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}+n=3\cdot 4^n+6\cdot 2^n+n-9$．　………………9 分

（Ⅲ）$\because \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}=(-1)^{n-1}$，　$\therefore c_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3(-2)^{n-1}-(-1)^n}=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}$．　……………………

10 分

当$n\geq 3$时，则$T_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3\cdot 2+1}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}$

$<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{11}{28}+\dfrac{\frac{1}{12}[1-(\frac{1}{2})^{n-2}]}{1-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{11}{28}+\dfrac{1}{6}[1-(\dfrac{1}{2})^{n-2}]<\dfrac{11}{28}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{47}{84}<\dfrac{48}{84}=\dfrac{4}{7}$．

$\because T_1<T_2<T_3$，　$\therefore$对任意的$n\in N^*$，$T_n<\dfrac{4}{7}$．　………………………14 分

**76、（1）** $f'(x)=e^{ax}(ax+2)(x-1), f(0)=-\dfrac{1}{a}, f'(0)=-2$

所以切线方程为$2x+y+\dfrac{1}{a}=0$

（2）令$f'(x)=0$

则$x=-\dfrac{2}{a}, x=1$

当$a<-2$时，$f(x)$在$(-\infty,-\dfrac{2}{a})$和$(1,+\infty)$上单调递减，在$(-\dfrac{2}{a},1)$上单调递增

当$a=-2$时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$在$R$上减函数

当$-2<a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(-\dfrac{2}{a},+\infty)$上单调递减，在$(1,-\dfrac{2}{a})$上单调递增

（3）当$a>0$时，

| $x$ | $(-\frac{3}{a},-\frac{2}{a})$ | $-\frac{2}{a}$ | $(-\frac{2}{a},1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

$\because f(-\frac{3}{a})>0, f(1)<0$

$\therefore f(1)=-\frac{1}{a}e^{a}$为最小值

$\therefore -\frac{1}{a}e^{a}+\frac{3}{a}\geq 0$对$x\in\left[-\frac{3}{a},+\infty\right)$恒成立

$\therefore a\in\left(0,\ln 3\right]$

77、（1）$a=2$时，$f(x)=\frac{x-2}{\ln x}$，

$f'(x)=\frac{x\ln x-x+2}{x\ln^{2}x}$，$f'(2)=\frac{1}{\ln 2}$，…………………………2 分

又$f(2)=0$

所以切线方程为$y=\frac{1}{\ln 2}(x-2)$…………………………2 分

（2）1° 当$0<x<1$时，$\ln x<0$，则$\frac{x-a}{\ln x}>\sqrt{x}\Leftrightarrow a>x-\sqrt{x}\ln x$

令$g(x)=x-\sqrt{x}\ln x$，$g'(x)=\frac{2\sqrt{x}-2-\ln x}{2\sqrt{x}}$，

再令$h(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$，$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}<0$

当$0<x<1$时$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$在$(0,1)$上递减，

$\therefore$当$0<x<1$时，$h(x)>h(1)=0$，

$\therefore g'(x)=\frac{h(x)}{2\sqrt{x}}>0$，所以$g(x)$在$(0,1)$上递增，$g(x)<g(1)=1$，

所以$a\geq 1$……………………5 分

2° $x>1$时，$\ln x>0$，则$\frac{x-a}{\ln x}>\sqrt{x}\Leftrightarrow a<x-\sqrt{x}\ln x\Leftrightarrow a<g(x)$

由 1° 知当$x>1$时$h'(x)>0$，$h(x)$在$(1,+\infty)$上递增

当$x>1$时，$h(x)>h(1)=0$，$g'(x)=\frac{h(x)}{2\sqrt{x}}>0$

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上递增，$\therefore g(x)>g(1)=1$

$\therefore a\leq 1$；…………………………5 分

由 1° 及 2° 得：$a=1$…………………………1 分

78、解：（I）依题意知：直线$l$是函数$f(x)=\ln x$在点（1，0）处的切线，故其斜率$k=f(1)=\frac{1}{1}=1$

所以直线$l$的方程为 $y=x-1$

又因为直线$l$与$g(x)$的图像相切　所以由$\begin{cases} y=x-1 \\ y=\frac{1}{2}x^2+mx+\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+(m-1)x+\frac{9}{2}=0$

得$\Delta=(m-1)^2-9=0>m=2(m=4$不合题意，舍去）

（Ⅱ）因为$h(x)=f(x+1)-g(x)=\ln(x+1)-x+2(x>-1)$,所以$h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$

当$-1<x<0$时，$h'(x)>0;$　当$x>0$时，　$h'(x)<0$

因此，$h(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减。

因此，当$x=0$时，$h(x)$取得最大值$h(0)=2$

（Ⅲ）当$0<b<a$时，$-1<\frac{b-a}{2a}<0$，由（Ⅱ）知：当$-1<x<0$时，$h(x)<2$，即$\ln(x+1)<x$

因此，有$f(a+b)-f(2a)=\ln\frac{a+b}{2a}=\ln(1+\frac{b-a}{2a})<\frac{b-a}{2a}$即$a+2af(a+b)<b+2af(2a)$

79、（1)法一：由已知$M(-1,0)$……………………………1 分

设$A(x_1,y_1)$，则$|AM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1+1|$，……………………………1 分

$|AF|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^{\,2}}=\sqrt{(x_1-1)^2+4x_1}=|x_1+1|$，………………………1 分

由$4|AM|=5|AF|$得，$4\sqrt{1+k^2}=5$，

解得$k=\pm\frac{3}{4}$………………………2 分

法二：记 A 点到准线距离为$d$，直线$l$的倾斜角为$\alpha$，

由抛物线的定义知$|AM|=\frac{5}{4}d$，………………………2 分

$\therefore \cos\alpha=\pm\frac{d}{|AM|}=\pm\frac{4}{5}$,

$\therefore k=\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$………………………3 分

（2）设$Q(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x+1) \end{cases}$得$ky^2-4y+4k=0$，………………………1 分

首先由$\begin{cases} k\neq 0 \\ 16-16k^2>0 \end{cases}$得$-1<k<1$且$k\neq 0$

$k_{QA}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\frac{y_0-y_1}{\frac{y_0^{\,2}}{4}-\frac{y_1^{\,2}}{4}}=\frac{4}{y_0+y_1}$，同理$k_{QB}=\frac{4}{y_0+y_2}$………………………2 分

由 $QA \perp QB$ 得 $\dfrac{4}{y_0+y_1}\cdot\dfrac{4}{y_0+y_2}=-1$，…………………………2 分

即：$y_0{}^2+y_0(y_1+y_2)+y_1y_2=-16$，

$\therefore y_0{}^2+\dfrac{4}{k}y_0+20=0$，…………………………2 分

$\Delta=(\dfrac{4}{k})^2-80\ge 0$，得 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\le k\le\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 且 $k\ne 0$，

由 $-1<k<1$ 且 $k\ne 0$ 得，

$k$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$…………………………3 分

80.

**解析**：（1）设动圆心 P(x,y)

因为动圆 P 与定园 F 内切，则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+2|-1$

若 $x\ge -2,$ 则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1\Rightarrow y^2=4x,$

若 $x<-2,$ 则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=-x-3\Rightarrow y^2=8(x+1),$ 与 $x<-2$ 矛盾.

故动圆心 P 的轨迹是以 F 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线,

其方程为：$y^2=4x.$ ……4 分

(2) ①当直线 m 的斜率存在， 由 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=k(x-1)\end{cases}\Rightarrow k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$

设 $A(x_1,y_1),D(x_2,y_2),$ 则 $x_1+x_2=2+\dfrac{4}{k^2},x_1\cdot x_2=1,$

$\therefore |AD|=|AF|+|DF|=x_1+1+x_2+1=4+\dfrac{4}{k^2},$ 而 $|BC|=2,$

若 $|AD|=2|BC|,$ 则 $4+\dfrac{4}{k^2}=4,k$ 无解，此时不存在。 ……8 分

当直线 m 的斜率不存在时，则 $|AD|=4,|BC|=2$，显然 $|AD|=2|BC|$ 成立.

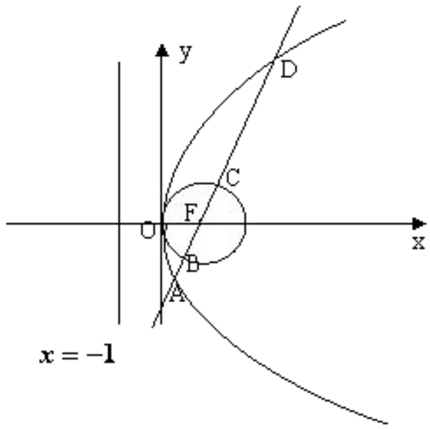
故存在直线 m 使 $|AD|=2|BC|$ 成立.此时直线 m: $x=1.$ ……9 分

②当直线 m 的斜率存在时，由① $|AB|\cdot|CD|=(|AF|-1)\cdot(|DF|-1)=x_1\cdot x_2=1$

当直线 m 的斜率不存在时，

$|AB|\cdot|CD|=(|AF|-1)\cdot(|DF|-1)=(2-1)(2-1)=1.$

故对于任意的直线 m, $|AB|\cdot|CD|=1$ 为定值.　　　　　　……13 分




**81** 解：⑴由题意知：$a=1$，$b=0$，$\therefore f(x)=x^2+2x$………2'

设函数 $y=f(x)$ 图象上的任意一点 $Q(x_0,\ y_0)$ 关于原点的对称点为 P（x,y），

则 $x_0=-x,\ y_0=-y$，……………………4 分

因为点 $Q(x_0,\ y_0)$ 在 $y=f(x)$ 的图像上，

$\therefore -y=x^2-2x, \therefore y=-x^2+x, \therefore g(x)=-x^2+2x$……7'

⑵ $F(x)=-x^2+2x-\lambda(x^2+2x)=-(1+\lambda)x^2+2(1-\lambda)x$

$\because F(x)$ 在 $(-1,1]$ 上是增函且连续，$F'(x)=-2(1+\lambda)x+2(1-\lambda)\ge 0$ 恒成立……9 分

即 $\lambda\le\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2}{1+x}-1$ 在 $(-1,1]$ 上恒成立，………………..10 分

由 $\dfrac{2}{1+x}-1$ 在 $(-1,1]$ 上为减函数，………………..12 分

当 $x=1$ 时取最小值 0，………………..13 分

故 $\lambda\le 0$, 所求 $\lambda$ 的取值范围是 $(-\infty,0]$………14'

另解：$\because F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，$\therefore F'(x)=(-2-2\lambda)x+(2-2\lambda)$ 在 $[-1,1]$ 上非负

$\therefore\begin{cases}(-2-2\lambda)+(2-2\lambda)\ge 0\\(-2-2\lambda)(-1)+(2-2\lambda)\ge 0\end{cases}$，解得 $\lambda\le 0$

**82**（1）由已知 $a_2-a_1=-2$，$a_3-a_2=-1$

$\therefore$ 公差 $d=-1-(-2)=1$　　　　　　　　　　………1 分

$\therefore a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+(n-1)\times 1=n-3$　　　　　　………2 分

$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=6+(-2)+(-1)+0+\cdots+(n-4)$

$=6+\frac{[(-2)+(n-4)](n-1)}{2}=\frac{n^2-7n+18}{2}$ ………4 分

由已知 $b_1-2=4, b_2-2=2$ ………5 分

所以公比 $q=\frac{1}{2}$，$\therefore b_n-2=(b_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………6 分

$\therefore b_n=2+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ………7 分

（2） 设 $f(k)=a_k-b_k$

$=\left(\frac{1}{2}k^2-\frac{7}{2}k+9\right)-\left[2+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]=\frac{1}{2}\left[\left(k-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^k+7$ …8 分

所以当 $k\geq 4$ 时，$f(k)$ 是增函数。………10 分

又$\because f(4)=\frac{1}{2}$，所以当 $k\geq 2$ 时 $f(k)\geq\frac{1}{2}$，………12 分

又$\because f(1)=f(2)=f(3)=0$，………13 分

所以不存在 $k$，使 $f(k)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$。………14 分

**83**．本小题考查等差数列通项与前 n 项和关系以及数列与不等式相结合的有关问题。

解法：（1）证明：$\because n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$ …………（1 分）

$\therefore S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$，$\therefore (S_n-S_{n-1})(2S_n-1)=2S_n^2$，$\therefore S_{n-1}-S_n=2S_nS_{n-1}$ ……………（3 分）

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2(n\geq 2)$，………………（5 分）

数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是以$\frac{1}{S_1}=1$为首项，以 2 为公差的等差数列。（6 分）

（2）由（1）知$\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$，$\therefore S_n=\frac{1}{2n-1}$，$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$. …（7 分）

设$F(n)=\frac{(1+S_1)(1+S_2)\cdots(1+S_n)}{\sqrt{2n+1}}$，则$\frac{F(n+1)}{F(n)}=\frac{(1+S_{n+1})\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$

$$=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}=\sqrt{\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}}>1.$$ …………（10 分）

$\therefore F(n)$在$n\in N^*$上递增，要使$F(n)\geq k$恒成立，只需$[F(n)]_{\min}\geq k$

$\because [F(n)]_{\min}=F(1)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$\therefore 0<k\leq\frac{2}{3}\sqrt{3},\therefore k_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$ ………………（12 分）

**84**．本小题考查椭圆简单几何性质、直线与椭圆的位置关系及向量知识的应用，

解：（1）由于$\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{NF_1},|\overrightarrow{F_1F_2}|=2$，$\therefore\begin{cases}2c=|\overrightarrow{F_1F_2}|=2,\\ \frac{a^2}{c}-1=|\overrightarrow{NF_1}|=1,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a^2=2\\ b^2=1\end{cases}$，从而所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1.$………………（3 分）

$\because \overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB},\quad \therefore A,B,N$三点共线，而点$N$的坐标为（－2，0）.

设直线 AB 的方程为$y=k(x+2)$，其中$k$为直线 AB 的斜率，依条件知$k\neq0$.

由$\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 消去$x$得$(\frac{1}{k}y-2)^2+2y^2=2$，即$\frac{2k^2+1}{k^2}y^2-\frac{4}{k}y+2=0.$

根据条件可知$\begin{cases}\Delta=(\frac{4}{k})^2-8\cdot\frac{2k^2+1}{k^2}<0,\\ k\neq0.\end{cases}$ 解得$0<|k|<\frac{\sqrt{2}}{2}.$………………（5 分）

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则根据韦达定理，得$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4k}{2k^2+1},\\ y_1y_2=\frac{2k^2}{2k^2+1}.\end{cases}$

又由$\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB},$得$(x_1+2,y_1)=\lambda(x_2+2,y_2)$

$\therefore\begin{cases}x_1+2=\lambda(x_2+2),\\ y_1=\lambda y_2.\end{cases}$ 从而$\begin{cases}(1+\lambda)y_2=\frac{4k}{2k^2+1},\\ \lambda y_2^2=\frac{2k^2}{2k^2+1}.\end{cases}$ 消去$y_2$得$\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\frac{8}{2k^2+1}.$

令$\phi(\lambda)=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda},\lambda\in[\frac{1}{5},\frac{1}{3}],$，则$\phi'(\lambda)=(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2)'=1-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}.$

由于$\frac{1}{5}\leq\lambda\leq\frac{1}{3}$，所以$\phi'(\lambda)<0.\therefore\phi(\lambda)$是区间$[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$上的减函数，

从而$\phi(\frac{1}{3}) \le \phi(\lambda) \le \phi(\frac{1}{5})$，即$\frac{16}{3} \le \phi(\lambda) \le \frac{36}{5}$，

$\therefore \frac{16}{3} \le \frac{8}{2k^2+1} \le \frac{36}{5}$，$\therefore \frac{16}{3} \le \frac{8}{2k^2+1} \le \frac{36}{5}$，解得$\frac{\sqrt{2}}{6} \le |k| \le \frac{1}{2}$，

而$0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{6} \le k \le \frac{1}{2}$.

因此直线 AB 的斜率的取值范围是$[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{2}]$.………………（7 分）

（3） 上半椭圆的方程为$y = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}$，且$y_1 = \sqrt{1-\frac{1}{2}x_1^2}, y_2 = \sqrt{1-\frac{1}{2}x_2^2}$，

求导可得 $y' = \frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}$

所以两条切线的斜率分别为$k_{PA} = -\frac{x_1}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}x_1^2}} = -\frac{x_1}{2y_1}, k_{PB} = -\frac{x_2}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}x_2^2}} = -\frac{x_2}{2y_2}$ （8 分）

[解法一]：切线 PA 的方程是$y - y_1 = -\frac{x_1}{2y_1}(x - x_1)$，即$y = -\frac{x_1 x}{2y_1} + \frac{x_1^2 + 2y_1^2}{2y_1}$.

又$x_1^2 + 2y_1^2 = 2$，

从而切线 PA 的方程为$y = -\frac{x_1 x}{2y_1} + \frac{1}{y_1}$，同理可得切线 PB 的方程为 $y_1 = -\frac{x_2 x}{2y_2} + \frac{1}{y_2}$.

由 $\begin{cases} y = -\frac{x_1 x}{2y_1} + \frac{1}{y_1} \\ y = -\frac{x_2 x}{2y_2} + \frac{1}{y_2} \end{cases}$ 可解得点 P 的坐标 $(x_0, y_0)$满足$\begin{cases} x_0 = -\frac{2(y_2 - y_1)}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \\ y_0 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \end{cases}$

再由 $\begin{cases} x_1 + 2 = \lambda(x_2 + 2) \\ y_1 + \lambda = y_2 \end{cases}$，得 $\frac{x_1+2}{y_1} = \frac{x_2+2}{y_2} \Leftrightarrow x_2 y_1 - x_1 y_2 = 2(y_2 - y_1)$.

$\therefore \begin{cases} x_0 = -\frac{2(y_2 - y_1)}{2(y_2 - y_1)} = -1 \\ y_0 = \frac{x_2 - x_1}{2(y_2 - y_1)} = \frac{1}{2k_{AB}} \end{cases}$ ……………………（11 分）

又由（1）知 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\le k_{AB}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\le\dfrac{1}{k_{AB}}\le 3\sqrt{2}$，$\therefore 1\le y_0\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

因此点 P 在定直线 $x=-1$ 上，并且点 P 的纵坐标的取值范围是[1，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$] ……（12 分）

[解法二]：设点 P 的从标为 $(x_0,y_0)$，则可得切线 PA 的方程是 $y-y_0=-\dfrac{x_1}{2y_1}(x-x_0)$,

而点 $A(x_1,y_1)$ 在此切线上，所以有 $y_1-y_0=-\dfrac{x_1}{2y_1}(x_1-x_0)$，即

$x_0x_1+2y_0y_1=x_1^2+2y_1^2$…（9 分）

所以有 $x_0x_1+2y_0y_1=2$， ①

同理可得 $x_0x_2+2y_0y_2=2.$ ②

根据①和②可知直线 AB 的方程为 $x_0x+2y_0y=2$

而直线 AB 过定点 N（－2，0），$\therefore -2x_0=2\Rightarrow x_0=-1$，直线 AB 的方程为 $-x+2y_0y=2,$

$\therefore k_{AB}=\dfrac{1}{2y_0}$ ………………………………（11 分 0

又由（1）知 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\le k_{AB}\le\dfrac{1}{2}$，所以有 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\le\dfrac{1}{2y_0}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1\le y_0\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

因此点 P 在定直线 $x=-1$ 上，并且点 P 的纵坐标的取值范围是 $[1,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}]$ ……（12 分）

**85**. 本小题考查利用导数研究函数的单调区间以及用导数的方法讨论方程根的情况。

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\dfrac{3}{2},0)\cup(0,+\infty)$.

对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{3}{2}}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{x^2(x+\dfrac{3}{2})}$ …………（2 分）

由 $f'(x)>0$，得 $-\dfrac{3}{2}<x<-1$或$x>3$，由 $f'(x)<0$，得 $-1<x<0$或$0<x<3$.

因此 $(-\dfrac{3}{2},-1)$和 $(3,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的增区间；

（－1，0）和（0，3）是函数 $f(x)$ 的减区间 ………………（5 分）

（2）[解法一]：因为 $g(x)=\dfrac{1}{2}x+m\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}x+m\Leftrightarrow m=\ln x-\dfrac{1}{2}x.$

所以实数 m 的取值范围就是函数 $\phi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$ 的值域 …………（6 分）

对 $\phi(x)$求导得$\phi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

令 $\phi'(x)=0$，得$x=2$，并且当$x>2$时，$\phi'(x)<0$;当$0<x<2$时，$\phi'(x)>0$

∴当 $x$=2 时 $\phi(x)$ 取得最大值，且 $\phi(x)_{\max}=\phi(2)=\ln 2-1$.

又当 x 无限趋近于 0 时，$\ln x$ 无限趋近于$-\infty$,$-\frac{1}{2}x$ 无限趋近于 0，

进而有 $\phi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$ 无限趋近于$-\infty$.因此函数 $\phi(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$ 的值域是 $(-\infty,\ln 2-1]$

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,\ln 2-1]$ ………………（9 分）

[解法二]：方程 $g(x)=\frac{1}{2}x+m$ 有实数根等价于直线 $g(x)=\frac{1}{2}x+m$ 与曲线 y=ln$x$ 有公共点，

并且当直线 $g(x)=\frac{1}{2}x+m$ 与曲线 y=ln$x$ 相切时，m 取得最大值. ……（6 分）

设直线 $y=\frac{1}{2}x+t$与曲线$y=\ln x$ 相切，切点为 $T(x_0,y_0)$.则对$y=\ln x$ 求导得

$y'=\frac{1}{x}$，根据相切关系得$\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{x_0}\\ y_0=\ln x_0\\ y_0=\frac{1}{2}x_0+t\end{cases}$，解得 $x_0=2,y_0=\ln 2$，进而$t=\ln 2-1$.

所以 m 的最大值是 $\ln 2-1$。而且易知当 $m\le\ln 2-1$时，直线$y=\frac{1}{2}x+m$ 与曲线 y=ln$x$ 总有公共点。

因此实数 m 的取值集合是 $(-\infty,\ln 2-1]$. ………………（9 分）

（3）结论：这样的正数 k 不存在。 ………………（10 分）

下面采用反证法来证明：假设存在正数 k，使得关于 $x$ 的方程

$f(x)=kg(x)$ 有 两个不相等的实数根 $x_1$和$x_2$，则

$$\begin{cases}f(x_1)=kg(x_1)\\ f(x_2)=kg(x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x_1+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_1}=k\ln x_1, & ①\\ \ln(x_2+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_2}=k\ln x_2. & ②\end{cases}$$ …………（11 分）

根据对数函数定义域知 $x_1$和$x_2$ 都是正数。

又由（1）可知，当 $x>0$时，$f(x)_{\min}=f(x)=\ln(3+\frac{3}{2})+\frac{2}{3}>0$

$\therefore f(x_1)=\ln(x_1+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_1>0}, f(x_2)=\ln(x_2+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_2}>0.$

再由 k>0，可得 $g(x_1)=\ln x_1>0, g(x_2)=\ln x_2>0 \Rightarrow x_1>1, x_2>1.$

由于 $x_1 \neq x_2$,所以不妨设 $1<x_1<x_2$，

由①和②可得 $\dfrac{\ln(x_1+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_1}}{\ln x_1}=\dfrac{\ln(x_2+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_2}}{\ln x_2}$

利用比例性质得 $\dfrac{\ln(x_1+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_1}-\ln x_1}{\ln x_1}=\dfrac{\ln(x_2+\frac{3}{2})+\frac{2}{x_2}-\ln x_2}{\ln x_2}$

即 $\dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_1})+\frac{2}{x_1}}{\ln x_1}=\dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_2})+\frac{2}{x_2}}{\ln x_2}.(*)$ …………（13 分）

由于 $\ln x$ 是区间 $(1,+\infty)$ 上的恒正增函数，且 $1<x_1<x_2, \therefore \dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<1.$

又由于 $\ln(1+\frac{3}{2x})+\frac{2}{x}$ 是区间 $(1,+\infty)$ 上的恒正减函数，且 $1<x_1<x_2$. $\therefore$

$\dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_1})+\frac{2}{x_1}}{\ln(1+\frac{3}{2x_2})+\frac{2}{x_2}}>1.$

$\therefore \dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_1})+\frac{2}{x_1}}{\ln(1+\frac{3}{2x_2})+\frac{2}{x_2}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_1})+\frac{2}{x_1}}{\ln x_1}>\dfrac{\ln(1+\frac{3}{2x_2})+\frac{2}{x_2}}{\ln x_2}$，这与（*）式矛盾。

因此满足条件的正数 k 不存在 ……………………（14 分）

86、（Ⅰ）设直线 $l$ 方程为 $x=ky+4$，代入 $y^2=2px$ 得 $y^2-2kpy-8p=0$

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则有 $y_1+y_2=2kp,\ y_1y_2=-8p$

而 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,

故 $0=x_1x_2+y_1y_2=(ky_1+4)(ky_2+4)-8p=k^2y_1y_2+4k(y_1+y_2)+16-8p$

即 $0=-8k^2p+8k^2p+16-8p$，得 $p=2$，焦点 $F(1,0)$.

（Ⅱ）设 $R(x,y)$，由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FR}$ 得 $(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(x-1,y)$

所以 $x_1+x_2=x+1,\ y_1+y_2=y$

而 $y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2$，可得 $y(y_1-y_2)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$

又 $FR$ 的中点坐标为 $M(\frac{x+1}{2},\frac{y}{2})$，

当 $x_1\neq x_2$ 时，利用 $k_{PQ}=k_{MA}$ 有 $\frac{4}{y}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{y}{2}}{\frac{x+1}{2}-4}$

整理得，$y^2=4x-28$.

当 $x_1=x_2$ 时，$R$ 的坐标为 $(7,0)$，也满足 $y^2=4x-28$.

所以 $y^2=4x-28$ 即为动点 $R$ 的轨迹方程.

87、解析：(1)由题意可知 $a-c=\sqrt{2}-1$ 且 $\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2},b=c=1$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）由（1）得 $F(1,0)$，所以 $0\le m\le 1$.假设存在满足题意的直线 $l$，设 $l$ 的方程为

$y=k(x-1)$，代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$　　① $\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{-2k}{2k^2+1}$，

$\therefore \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(x_1-m,y_1)+(x_2-m,y_2)=(\frac{4k^2}{2k^2+1}-2m,\frac{-2k}{2k^2+1})$，

$\because (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\perp\overrightarrow{AB}$, 而 $AB$ 的方向向量为 $(1,k)$,

$\therefore \frac{4k^2}{2k^2-1}-2m+\frac{-2k}{2k^2+1}\times k=0 \Leftrightarrow (1-2m)k^2=m$

$\therefore$ 当 $0\le m<\frac{1}{2}$ 时, $k=\pm\sqrt{\frac{m}{1-2m}}$,即存在这样的直线 $l$;

当 $\frac{1}{2}\le m\le 1$ 时, $k$ 不存在,即不存在这样的直线 $l$

88、解：（1）依题意，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，则其右焦点坐标为

$F(c,0), c=\sqrt{a^2-b^2}$　，　　　　　　　　　　………… 1 分

由$|FB|=2$，得$\sqrt{(c-\sqrt{2})^2+(0-\sqrt{2})^2}=2$，

即$(c-\sqrt{2})^2+2=4$，解得$c=2\sqrt{2}$。 ………… 3 分

又 $\because b=2$ ，$\therefore$ $a^2=c^2+b^2=12$，即椭圆方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$。 ……4 分

（2）由$|AM|=|AN|$知点$A$在线段$MN$的垂直平分线上，

由$\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$消去$y$得$x^2+3(kx-2)^2=12$

即$(1+3k^2)x^2-12kx=0$ （*） ………… 6 分

由 $k\neq 0$，得方程（*）的$\Delta=(-12k)^2=144k^2>0$，即方程（*）有两个不相等的实数根。

…………7 分

设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，线段$MN$的中点$P(x_0,y_0)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{12k}{1+3k^2}$，$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{6k}{1+3k^2}$，

$\therefore$ $y_0=kx_0-2=\dfrac{6k^2-2(1+3k^2)}{1+3k^2}=\dfrac{-2}{1+3k^2}$，即$P(\dfrac{6k}{1+3k^2},\dfrac{-2}{1+3k^2})$ ……… 9 分

$\because k\neq 0$，$\therefore$直线$AP$的斜率为$k_1=\dfrac{\dfrac{-2}{1+3k^2}-2}{\dfrac{6k}{1+3k^2}}=\dfrac{-2-2(1+3k^2)}{6k}$，……………10 分

由$AP\perp MN$，得$\dfrac{-2-2(1+3k^2)}{6k}\times k=-1$， …………………… 11 分

$\therefore$ $2+2+6k^2=6$，解得：$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， …… 12 分

又$0\leq\alpha<\pi$，故 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，或$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore$ 存在直线$l$满足题意，其倾斜角$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，或$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$。…………… 13 分

89、解：

(I) 有$S_{n+1}-S_n$ 易得

(Ⅱ) 由$a_{n+1}+a_n=4n+2$得$a_{n+1}-(2n+2)=-(a_n-2n)=\cdots=(-1)^n(a_1-2)$

又$a_1=2$所以$a_n=2n$

(III) $\because \dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\cdots=\sqrt{\dfrac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}}<1$

90、解：(Ⅰ)由已知得$a_1=a-1, a_2=4, a_3=2a$，又$a_1+a_3=2a_2$，

$\therefore (a-1)+2a=8$, 即$a=3$. ……………………………（2 分）

$\therefore a_1=2$，公差$d=a_2-a_1=2$.

由$S_k=ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}d$，得 ……………………………（4 分）

$2k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times 2=2550$

即$k^2+k-2550=0$．解得$k=50$或$k=-51$(舍去)．$\therefore a=3, k=50$. ……（6 分）

(Ⅱ)由$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, 得 $S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+n.$ ……（8 分）

$\therefore b_n=\dfrac{S_n}{n}=n+1$ ……（9 分） $\therefore \{b_n\}$是等差数列.

则$b_3+b_7+b_{11}+\ldots+b_{4n-1}=(3+1)+(7+1)+(11+1)+\ldots+(4n-1+1)=\dfrac{(4+4n)n}{2}$ ……(11 分)

$\therefore b_3+b_7+b_{11}+\ldots+b_{4n-1}=2n^2+2n$ ………………………(12 分)

91．解：（1）令 a=b=1 求得$f(1)=0$ 2 分

又 $f(1)=f\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f(2)$ $\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$ 5 分

（2） $f(2^{-n})=f(2^{-1}\bullet 2^{1-n})=2^{-1}f(2^{1-n})+2^{1-n}f(2^{-1})$，$\therefore$ $2^nf(2^{-n})=2^{n-1}f(2^{1-n})-2^{-1}$.

令 $b_n=2^nf(2^{-n})$ ，$\therefore b_n=b_{n-1}-2^{-1}$， 9 分

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$是以公差 d=$-\dfrac{1}{2}$ $b_1=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$的等差数列 12 分

$\therefore$ $b_n=b_1+(n-1)\bullet\left(-\dfrac{1}{2}\right)$， $\therefore b_n=-\dfrac{n}{2}$，$\therefore f(2^{-n})=-\dfrac{n}{2^{n+1}}$ 14 分

**92**．解：（1）充分性：若 $a^2+b^2=0$ $\quad\therefore$ a=b=0。

$\therefore f(x)=x|x|$ $\quad$ 对任意的 $x\in R$ 都有 $f(-x)+f(x)=0$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，故充分性成立. $\qquad$ 2 分

必要性：若 $f(x)$ 为奇函数

则对任意的 $x\in R$ 都有 $f(-x)+f(x)=0$ 恒成立，

即 $\quad -x|-x-a|+b+x|x-a|+b=0$

令 x=0 ，得 b=0；令 x=a ，得 a=0 。$\therefore\ a^2+b^2=0$ $\qquad$ 6 分

（2）由 $b<2\sqrt{2}-3<0$，当 x=0 时 $a$ 取任意实数不等式恒成立

当 0<x≤1 时 $\quad f(x)<0$ 恒成立，也即 $x+\dfrac{b}{x}<a<x-\dfrac{b}{x}$ 恒成立

令 $g(x)=x+\dfrac{b}{x}$ 在 0<x≤1 上单调递增，$\therefore a>g_{\max}(x)=g(1)=1+b$ $\qquad$ 10 分

令 $h(x)=x-\dfrac{b}{x}$ ， 则 $h(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-b}\right]$ 上单调递减，$\left[\sqrt{-b},+\infty\right)$ 单调递增

$1^\circ$ 当 $b<-1$ 时 $\qquad h(x)=x-\dfrac{b}{x}$ 在 0<x≤1 上单调递减

$\therefore\quad a<h_{\min}(x)=h(1)=1-b$ 。$\therefore 1+b<\ a<1-b$ 。 $\qquad$ 12 分

$2^\circ$ 当 $-1\leqslant b<2\sqrt{2}-3$ 时， $\quad h(x)=x-\dfrac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{-b}$ ，

$\therefore a<h_{\min}(x)=2\sqrt{-b}$ ，$\therefore\quad 1+b<\ a<2\sqrt{-b}$ $\qquad$ 14 分

**93**．解：（1）$\because f(x)>a^2$ $\ \therefore x^2+(a-3)x-3a>0$ ，$\therefore (x-3)(x+a)>0$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立，又 $\because x-3<0$ 恒成立，$\therefore x+a<0$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立，$\therefore a<-x,$ 又 $-x\in[-2,-1]$ ，$\therefore a<-2.$

（2）由 $\varDelta=(a-3)^2-4(a^2-3a)\ge 0$ 得：$-1\le a\le 3$ ，

不妨设 $a=p$ ，则 $q$，$r$ 恰为方程两根，由韦达定理得：

① $p+q+r=3,qr=a^2-3a,$

$\therefore$② $p^2+q^2+r^2=a^2+(q+r)^2-2pr=a^2+(3-a)^2-2(a^2-3a)=9$

③而 $p^3+q^3+r^3=a^3+(q^3+r^3)=a^3+(q+r)[q^2-qr+r^2]=3a^3-9a^2+27.$

设 $g(a)=3a^3-9a^2+27$ ，求导得： $g(a)=9a^2-18a=9a(a-2)$

当 $a\in[2,3]$ 时， $g(a)>0,g(a)$ 递增；当 $a\in[0,2]$ 时， $g(a)<0,g(a)$ 递减；

当 $a\in[-1,0]$ 时， $g(a)>0, g(a)$ 递增，

$\therefore g(a)$ 在 $[-1,3]$ 上的最小值为 $\min\{g(-1),g(2)\}=\min\{15,15\}=15$

（3） $H(a)=-\dfrac{1}{6}[g(a)-27]=-\dfrac{1}{6}(3a^3-9a^2)$, 如果 $a\in(0,1)$，则

$H'(a)=3a-\dfrac{3}{2}a^2=3a(1-\dfrac{1}{2}a)>0$

$\therefore H(a)$ 在 $(0,1)$ 为递增函数，$\therefore H(a)\in(H(0),H(1))=(0,1),\because a_{n+1}=H(a_n)=-\dfrac{1}{6}(3a_n{}^3-9a_n{}^2)$

$\therefore a_1\in(0,1)\Rightarrow a_2\in(0,1)\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_n\in(0,1)\Rightarrow\cdots$

又 $\because a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}a_n{}^3+\dfrac{3}{2}a_n{}^2-a_n=-\dfrac{1}{2}a_n(a_n-2)(a_n-1)<0$，$\therefore a_{n+1}<a_n$.

**94**．（1）由 c=1 知 B（0，1），$\because \overrightarrow{OH}=(3+2\sqrt{3})\overrightarrow{HB}$， $\therefore x_H=0, y_H=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

即 $H(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, 点 C 在单位圆上，$\therefore C=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

设双曲线 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由点 C 的双曲线 E 上，半焦距 c=1 有：$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\ \dfrac{1}{4a^2}-\dfrac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

所以双曲线 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

（2）证明：∵A₁（－c，0），B（0，c），由 $\overrightarrow{OH}=(3+2\sqrt{3})\overrightarrow{HB}$得$:H(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}c),C(\dfrac{1}{2}c,\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)$,

设双曲线 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, $\therefore$ $\begin{cases}a^2+b^2=c^2 & ①\\ \dfrac{c^2}{4a^2}-\dfrac{3c^2}{4b^2}=1 & ②\end{cases}$

①代入②，化简整理得 $3a^4+6a^2b^2-b^4=0,\therefore (\dfrac{b}{a})^4-6(\dfrac{b}{a})^2-3=0$

解得 $(\dfrac{b}{a})^2=3+2\sqrt{3}$.

又 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=1+(\dfrac{b}{a})^2=4+2\sqrt{3}.\therefore e=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$，即双曲线 E 的离心离是与 c 无关的常数。

（3）假设存在实数$\lambda$,使$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{FC}$恒成立，$A_1(-c,0),C(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2})$

有$x_F=\dfrac{-c+\frac{c}{2}\cdot\lambda}{1+\lambda},y_F=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\lambda}{1+\lambda}$

点 F$(\frac{c(\lambda-2)}{2(1+\lambda)},\frac{\sqrt{3}c\lambda}{2(1+\lambda)}$,点 C，F 都在双曲线 E 上，故有$\begin{cases}\dfrac{c^2}{4a^2}-\dfrac{3c^2}{4b^2}=1\\ \dfrac{c^2(\lambda-2)^2}{4a^2(1+\lambda)^2}-\dfrac{3c^2\lambda^2}{4b^2(1+\lambda)^2}\end{cases}$

由③得$e^2-\frac{3c^2}{b^2}=4\Rightarrow\frac{c^2}{b^2}=\frac{e^2-4}{3}$⑤

⑤代入④得$\frac{e^2(\lambda-2)^2}{4(1+\lambda)^2}-(e^2-4)\cdot\frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}=1$,化简整理得$-\lambda e^2+e^2=2\lambda+1$

即$\lambda=\frac{e^2-1}{e^2+2}$,利用（2）小题的结论得：$\lambda=\frac{3+2\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$,

故存在实数$\lambda=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$,使$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{FC}$恒成立.

**95.** （1）$\because f'(x)=ax^2+2bx+c$,由题意及导数的几何意义得$f'(1)=a+2b+c=0$①

$f'(m)=am^2+2bm+c=-a$②

又$a<b<c$,可得$4a<a+2b+c<4c$,即$4a<0<4c$,故$a<0,c>0$

由①得$c=-a-2b$，代入$a<b<c$,再由$a<0$,得$-\frac{1}{3}<\frac{b}{a}<1$③

将 c=－a－2b 代入②得$am^2+2bm-2b=0$即方程$ax^2+2bx-2b=0$有实根，

故判别式$\Delta=4b^2+8ab\geq 0$,得$(\frac{b}{a})^2+2(\frac{b}{a})\geq 0$,得$\frac{b}{a}\leq -2$,或$\frac{b}{a}\geq 0$④

由③、④得$0\leq\frac{b}{a}<1$

（2）由$f'(x)=ax^2+2bx+c$的判别式$\Delta'=4b^2-4ac>0$

知方程$f'(x)=ax^2+2bx+c=0(*)$有两个不等实根，设为 $x_1$，$x_2$，

又由$f'(1)=a+2b+c=0$知，$x_1=1$为方程（*）的一个实根，

则由根与系数的关系得$x_1+x_2=-\frac{2b}{a},x_2=-\frac{2b}{a}-1<0<x_1$

当 x<$x_2$，或 x>$x_1$ 时，$f'(x)<0$,当$x_2<x<x_1$时$f'(x)>0$

故函数 f（x）的递增区间为[$x_2$，$x_1$]，由题设知[$x_2$，$x_1$]=[s，t]，

因此$|s-t|=|x_1-x_2|=2+\dfrac{2b}{a}$,由（1）知$0\le\dfrac{b}{a}<1$得$|s-t|$的取值范围为[2,4)

（3）由 $f'(x)+a<0$,即$ax^2+2bx+a+c<0$即$ax^2+2bx-2b<0$

因此 a<0，得$x^2+\dfrac{2b}{x}-\dfrac{2b}{a}>0$,整理得$(2x-2)\cdot\dfrac{b}{a}+x^2>0$

设$g(\dfrac{b}{a})=(2x-2)\cdot\dfrac{b}{a}+x^2$,可以看作是关于$\dfrac{b}{a}$的一次函数，由题意，

$g(\dfrac{b}{a})>0$对于$0\le\dfrac{b}{a}<1$恒成立故$\begin{cases}g(1)\ge 0\\ g(0)>0\end{cases}$即$\begin{cases}x^2+2x-2\ge 0\\ x^2>0\end{cases}$得$x\le-\sqrt{3}-1$或$x\ge\sqrt{3}-1$

由题意$[k,+\infty)\subseteq(-\infty,-\sqrt{3}-1)\cup[\sqrt{3}-1,+\infty)$，故$k\ge\sqrt{3}-1$,因此$k$的最小值为$\sqrt{3}-1$

**96.**（1）$\because f(-1)=0$，$\therefore b=a+1$，由$f(x)\ge 0$恒成立知：

$\Delta=b^2-4a=(a+1)^2-4a=(a-1)^2\le 0$，

$\therefore a=1$，从而$f(x)=x^2+2x+1,\therefore F(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x>0)\\ -(x+1)^2 & (x<0)\end{cases}$

（2）由（1）知$f(x)=x^2+2x+1,\therefore g(x)=f(x)-kx=x^2+(2-k)x+1,$

由$g(x)$在[－2，2]上是单调函数知：$-\dfrac{2-k}{2}\le-2$或$-\dfrac{2-k}{2}\ge 2$，得$k\le-2$或$k\ge 6.$

（3）$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$而$a>0,\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$为增函数，对于$F(x)$，

当$x>0$时$,-x<0,F(-x)=-f(-x)=-f(x)=-F(x)$，当$x<0$时，$-x>0,$

$F(-x)=f(-x)=f(x)=-F(x)$，$\therefore F(x)$是奇函数，且$F(x)$是在$[0,+\infty)$上为增函数，

当 mn<0，m、n 异号，

$(i)$当$m>0,n<0$时，由$m>-n>0$知$F(m)>F(-n)=-F(n)$ $\therefore F(m)+F(n)>0.$

$(ii)$当$m<0,n>0$时，由$n>-m>0$知$F(n)>F(-m)=-F(m)$，$\therefore F(m)+F(n)>0.$

综上可知$F(m)+F(n)>0.$

**97**、解：（1）设 P 点坐标为$(x,y)$，则$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，化简得$(x+3)^2+y^2=8$，

所以曲线 C 的方程为 $(x+3)^2+y^2=8$；

（2）曲线 C 是以 $(-3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆 ，曲线 $C'$ 也应该是一个半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆，点 $(-3,0)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标为 $(0,-3)$，所以曲线 $C'$ 的方程为 $x^2+(y+3)^2=8$，

该圆的圆心 $(0,-3)$ 到直线 $y=x+m-3$ 的距离 d 为 $d=\dfrac{|0-(-3)+m-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$，

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times d\times|AB|=\frac{1}{2}\times d\times 2\sqrt{8-d^2}=\sqrt{(8-\frac{m^2}{2})\times\frac{m^2}{2}}=\sqrt{7}$$

$\therefore \dfrac{m^2}{2}=1$，或 $\dfrac{m^2}{2}=7$，所以，$m=\pm\sqrt{2}$，或 $m=\pm\sqrt{14}$。

**98.** ⑴解：设 $a_{n+1}=2a_n-n^2+3n$ 可化为 $a_{n+1}+\lambda(n+1)^2+\mu(n+1)=2(a_n+\lambda n^2+\mu n)$，

即 $a_{n+1}=2a_n+\lambda n^2+(\mu-2\lambda)n-\lambda-\mu$ ……………………………（2 分）

故 $\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu-2\lambda=3\\ -\lambda-\mu=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=1\end{cases}$ ……………………………（4 分）

$\therefore a_{n+1}=2a_n-n^2+3n$ 可化为 $a_{n+1}-(n+1)^2+(n+1)=2(a_n-n^2+n)$ ………（5 分）

又 $a_1-1^2+1\neq 0$ ……………………………………………………………………（6 分）

故存在 $\lambda=-1,\ \mu=1$ 使得数列 $\{a_n+\lambda n^2+\mu n\}$ 是等比数列 ……………（7 分）

⑵证明：由⑴得 $a_n-n^2+n=(a_1-1^2+1)\cdot 2^{n-1}$ $\therefore a_n=2^{n-1}+n^2-n$，

故 $b_n=\dfrac{1}{a_n+n-2^{n-1}}=\dfrac{1}{n^2}$ ………………………………………………（8 分）

$\because\ b_n=\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}=\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{2}{2n+1}$ …………………………（9 分）

$\therefore n\geq 2$ 时，$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<1+(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5})+(\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{7})+\cdots+(\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{2}{2n+1})$

$=1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{2n+1}<\dfrac{5}{3}$ ……………………………………（11 分）

现证 $S_n>\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}$ $(n\geq 2)$.

当 $n=2$ 时 $S_n=b_1+b_2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$，而 $\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}=\dfrac{12}{3\times 5}=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{5}{4}>\dfrac{4}{5}$，

故 $n=2$ 时不等式成立 ……………………………………………………（12 分）

当 $n\geq 3$ 时，由 $b_n=\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ 得

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n>(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$，且由 $2n+1>6$ 得 $1>\dfrac{6}{2n+1}$，

$\therefore S_n > \dfrac{n}{n+1} > \dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}$ …………………………………… （14 分）

99、解：（I）依题意，$a_2 = 9c_1 + 10 = 100$ 故 $\dfrac{a_2}{a_1} = 10$

当 $n \geq 2$ 时，$a_{n+1} = 9S_n + 10$ $a_n = 9S_{n-1} + 10$ 得：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 10$

故 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_n = a_1 q^{n-1} = 10^n (n \in N^*)$，

$\therefore \lg a_n = n$ $\therefore \lg a_{a+1} - \lg a_n = (n+1) - n = 1$ 即 $\{\lg an\}$ 是等差数列

（Ⅱ）由（I）知，$T_n = 3(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \wedge + \dfrac{1}{n(n+1)})$

$$= 3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \wedge + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 3 - \frac{3}{n+1}$$

（Ⅲ）$\because T_n = 3 - \dfrac{3}{n+1}$ $\therefore$ 当 $n = 1$ 时，$T_n$ 取最小值 $\dfrac{3}{2}$

依题意有 $\dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{4}(m^2 - 5m)$ 解得 $-1 < m < 6$

故所求整数 $m$ 的取值集合为{0，1，2，3，4，5}

100、解：（I）由已知得 $a_1 = \dfrac{1}{2}, 2a_{n+1} = a_n + n,$

$\because a_2 = \dfrac{3}{4}, a_2 - a_1 - 1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{4},$

又 $b_n = a_{n+1} - a_n - 1, b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} - 1,$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - a_n - 1}{a_{n+2} - a_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{a_{n+1} + (n+1)}{2} - \dfrac{a_n + n}{2}}{a_{n+1} - a_n - 1} = \frac{\dfrac{a_{n+1} - a_n - 1}{2}}{a_{n+1} - a_n - 1} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $-\dfrac{3}{4}$ 为首项，以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

（II）由（I）知，$b_n = -\dfrac{3}{4} \times (\dfrac{1}{2})^{n-1} = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2^n},$

$\therefore a_{n+1} - a_n - 1 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2^n}, \therefore a_2 - a_1 - 1 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2},$

$a_3 - a_2 - 1 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2^2}, \cdots\cdots \therefore a_n - a_{n-1} - 1 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2^{n-1}},$

将以上各式相加得：

$$\therefore a_n - a_1 - (n-1) = -\frac{3}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}),$$

$$\therefore a_n = a_1 + n - 1 - \frac{3}{2} \times \frac{\dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}})}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2} + (n-1) - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{3}{2^n} + n - 2.$$

$\therefore a_n=\dfrac{3}{2^n}+n-2.$

（III）解法一：存在 $\lambda=2$，使数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列.

$\because S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=3(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})+(1+2+\cdots+n)-2n$

$$=3\times\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n(n+1)}{2}-2n=3(1-\frac{1}{2^n})+\frac{n^2-3n}{2}=-\frac{3}{2^n}+\frac{n^2-3n}{2}+3.$$

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{2^n})=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^{n+1}}.$$

数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列的充要条件是 $\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}=An+B,(A$ 、 $B$ 是常数)

即 $S_n+\lambda T_n=An^2+Bn,$

又 $S_n+\lambda T_n=-\dfrac{3}{2^n}+\dfrac{n^2-3n}{2}+3+\lambda(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^{n+1}})=\dfrac{n^2-3n}{2}+3(1-\dfrac{\lambda}{2})(1-\dfrac{1}{2^n})$

$\therefore$ 当且仅当 $1-\dfrac{\lambda}{2}=0$，即 $\lambda=2$ 时，数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 为等差数列.

解法二：存在 $\lambda=2$，使数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列.

由（I）、（II）知，$a_n+2b_n=n-2\ \therefore S_n+2T=\dfrac{n(n+1)}{2}-2n$

$$\frac{S_n+\lambda T_n}{n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}-2n-2T_n+\lambda T_n}{n}=\frac{n-3}{2}+\frac{\lambda-2}{n}T_n$$

又 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=-\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{2^n})=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^{n+1}}$

$$\frac{S_n+\lambda T_n}{n}=\frac{n-3}{2}+\frac{\lambda-2}{n}(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^{n+1}})$$

$\therefore$ 当且仅当 $\lambda=2$ 时，数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列.