八个有趣模型——搞定空间几何体的外接球与内切球

类型一、墙角模型（三条线两个垂直，不找球心的位置即可求出球半径）

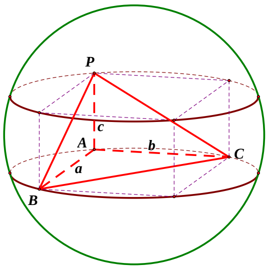


图1

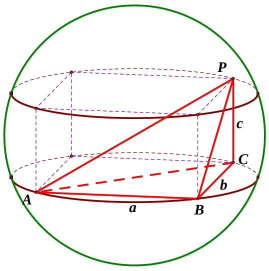


图2

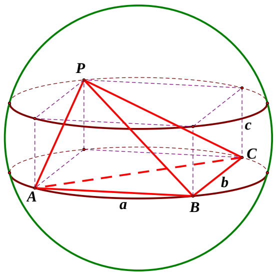


图3

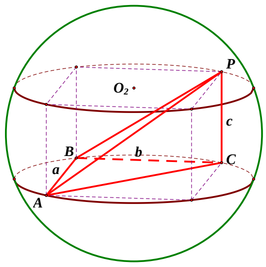


图4

方法：找三条两两垂直的线段，直接用公式 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，求出 R

例 1 （1）已知各顶点都在同一球面上的正四棱柱的高为 4，体积为 16，则这个球的表面积是（　C　）

A． 16π　　　B． 20π　　　C． 24π　　　D． 32π

（2）若三棱锥的三个侧面两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$，则其外接球的表面积是______________ 9π

解：（1） $V=a^2h=16$， $a=2$， $4R^2=a^2+a^2+h^2=4+4+16=24$， $S=24\pi$，选 C；

（2） $4R^2=3+3+3=9$， $S=4\pi R^2=9\pi$

（3）在正三棱锥 $S-ABC$ 中， M、N 分别是棱 SC、BC 的中点，且 $AM\perp MN$，若侧棱 $SA=2\sqrt{3}$，则正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是________。 36π

解：引理：**正三棱锥的对棱互垂直**。证明如下：

如图（3）-1，取 AB,BC 的中点 D,E，连接 AE,CD， AE,CD 交于 H，连接 SH，则 H 是底面正三角形 ABC 的中心，$\therefore SH\perp$ 平面 ABC，$\therefore SH\perp AB$，

$\because AC=BC$， $AD=BD$，$\therefore CD\perp AB$，$\therefore AB\perp$ 平面 SCD，

$\therefore AB\perp SC$， 同理： $BC\perp SA$， $AC\perp SB$，即正三棱锥的对棱互垂直，

本题图如图（3）-2， $\because AM\perp MN$， $SB//MN$，

$\therefore AM\perp SB$，$\because AC\perp SB$，$\therefore SB\perp$ 平面 SAC，

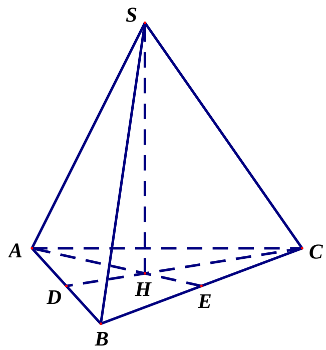
$\therefore SB\perp SA$， $SB\perp SC$，$\because SB\perp SA$， $BC\perp SA$，

$\therefore SA\perp$ 平面 SBC，$\therefore SA\perp SC$，

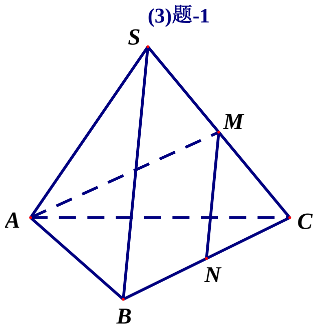
故三棱锥 $S-ABC$ 的三棱条侧棱两两互相垂直，

$\therefore (2R)^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2=36$，即 $4R^2=36$，

$\therefore$ 正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是 36π



(3)题-1

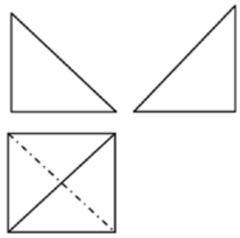


(3)题-2

（4）在四面体 $S-ABC$ 中，$SA\perp$ 平面ABC，$\angle BAC=120^{\circ},SA=AC=2,AB=1,$ 则该四面体的外接球的表面积为（ D ）$A.11\pi$ $B.7\pi$ $C.\dfrac{10}{3}\pi$ $D.\dfrac{40}{3}\pi$

（5）如果三棱锥的三个侧面两两垂直，它们的面积分别为6、4、3，那么它的外接球的表面积是_____

（6）已知某几何体的三视图如图所示，三视图是腰长为1的等腰直角三角形和边长为1的正方形，则该几何体外接球的体积为______________



解析：（4）在 ΔABC 中，$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot BC\cdot\cos120^{\circ}=7$，

$BC=\sqrt{7}$，ΔABC 的外接球直径为 $2r=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，

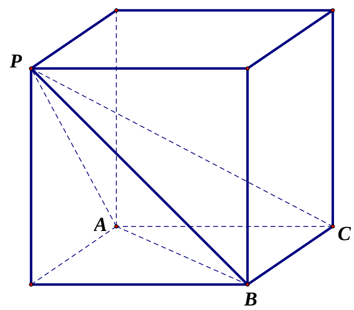
$\therefore (2R)^2=(2r)^2+SA^2=(\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}})^2+4=\dfrac{40}{3}$，$S=\dfrac{40\pi}{3}$，选 D

（5）三条侧棱两两生直，设三条侧棱长分别为 a,b,c（$a,b,c\in R^+$），则

$\begin{cases}ab=12\\bc=8\\ac=6\end{cases}$，$\therefore abc=24$，$\therefore a=3$，$b=4$，$c=2$，$(2R)^2=a^2+b^2+c^2=29$，$S=4\pi R^2=29\pi$，

（6）$(2R)^2=a^2+b^2+c^2=3$，$R^2=\dfrac{3}{4}$，$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$，



类型二、垂面模型（一条直线垂直于一个平面）

1．题设：如图 5，$PA\perp$平面 ABC

解题步骤：

第一步：将 ΔABC 画在小圆面上，A 为小圆直径的一个端点，作小圆的直径 AD，连接 PD，则 PD 必过球心 O；

第二步：O_1 为 ΔABC 的外心，所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D=r$（三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2r$），$OO_1=\dfrac{1}{2}PA$；

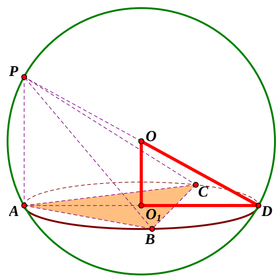


图5

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$

2．题设：如图 6，7，8，P 的射影是 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ΔABC 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点

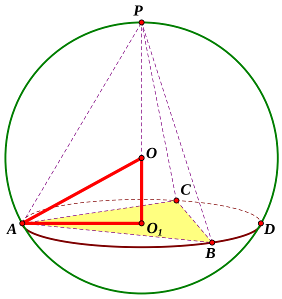


图6

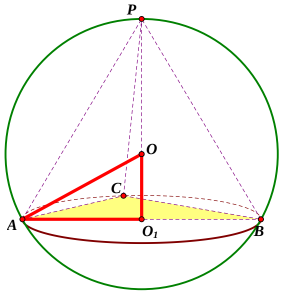


图7-1

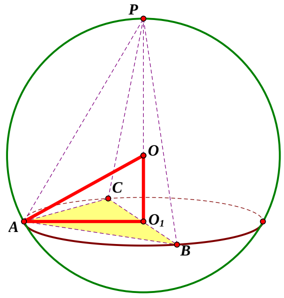


图7-2

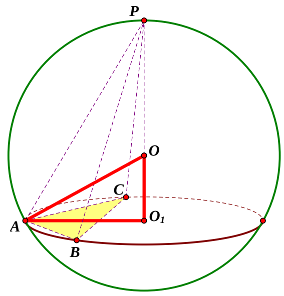


图8

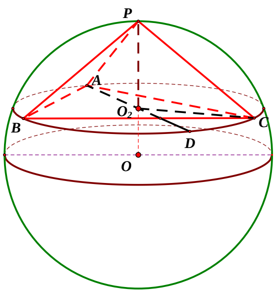


图8-1

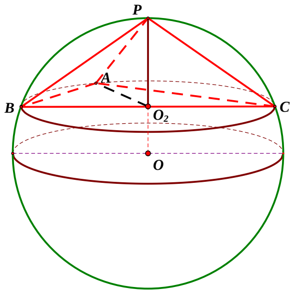


图8-2

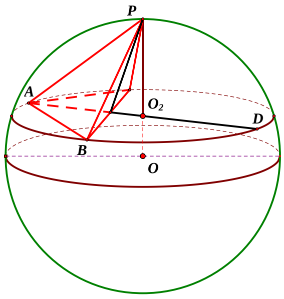


图8-3

解题步骤：

第一步：确定球心 O 的位置，取 ΔABC 的外心 O_1，则 P,O,O_1 三点共线；

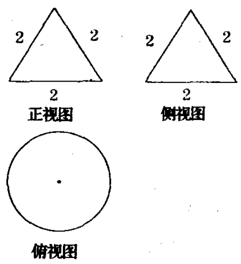
第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2 \Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 R

方法二：小圆直径参与构造大圆。

例 2　一个几何体的三视图如右图所示，则该几何体外接球的表面积为(　)C

A．3π　　B．2π　　C．$\dfrac{16\pi}{3}$　　D．以上都不对



解：选 C，$(\sqrt{3}-R)^2+1=R^2$，$3-2\sqrt{3}R+R^2+1=R^2$，$4-2\sqrt{3}R=0$，

$$R=\frac{2}{\sqrt{3}},\ S=4\pi R^2=\frac{16}{3}\pi$$

类型三、切瓜模型（两个平面互相垂直）

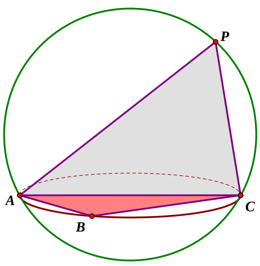


图9-1

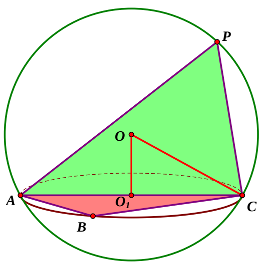


图9-2

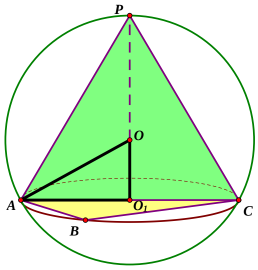


图9-3

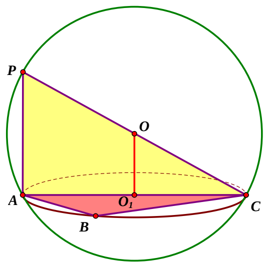


图9-4

1．题设：如图 9-1，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径）

第一步：易知球心 O 必是 ΔPAC 的外心，即 ΔPAC 的外接圆是大圆，先求出小圆的直径 $AC=2r$；

第二步：在 ΔPAC 中，可根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，求出 R

2．如图 9-2，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径）

$OC^2=O_1C^2+O_1O^2\Leftrightarrow R^2=r^2+O_1O^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{R^2-O_1O^2}$

3．如图 9-3，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径），且 P 的射影是 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱 $P-ABC$ 的底面 ΔABC 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点

解题步骤：

第一步：确定球心 O 的位置，取 ΔABC 的外心 O_1，则 P,O,O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 R

4．如图 9-3，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径），且 $PA\perp AC$，则

利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1{}^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1{}^2}$

例 3（1）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 1，底面边长为 $2\sqrt{3}$，则该球的表面积为______。

（2）正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为 $\sqrt{2}$，各顶点都在同一个球面上，则此球的体积为_

解：（1）由正弦定理或找球心都可得 $2R=7$，$S=4\pi R^2=49\pi$，

（2）方法一：找球心的位置，易知 $r=1$，$h=1$，$h=r$，故球心在正方形的中心 $ABCD$ 处，$R=1$，$V=\dfrac{4\pi}{3}$

方法二：大圆是轴截面所的外接圆，即大圆是 ΔSAC 的外接圆，此处特殊，$Rt\Delta SAC$ 的斜边是球半径，$2R=2$，$R=1$，$V=\dfrac{4\pi}{3}$

（3）在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=\sqrt{3}$，侧棱 PA 与底面 ABC 所成的角为 60°，则该三棱锥外接球的体积为（　　）

A．π　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. 4π　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

解：选 D，圆锥 A,B,C 在以 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆上，$R=1$

（4）已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的求面上，ΔABC 是边长为 1 的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$，则此棱锥的体积为（　　）A

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解：$OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$h=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

类型四、汉堡模型（直棱柱的外接球、圆柱的外接球）

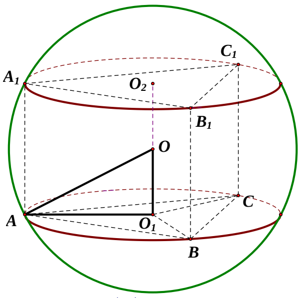


图10-1

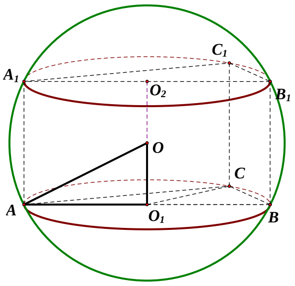


图10-2

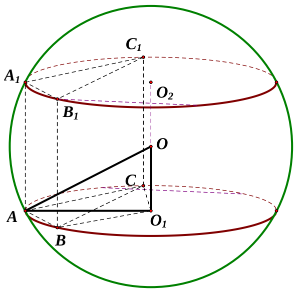


图10-3

题设：如图 10-1，图 10-2，图 10-3，直三棱柱内接于球（同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形）

第一步：确定球心 O 的位置，O_1 是 ΔABC 的外心，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC；

第二步：算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，$OO_1=\dfrac{1}{2}AA_1=\dfrac{1}{2}h$（$AA_1=h$ 也是圆柱的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(\dfrac{h}{2})^2+r^2\Rightarrow R=\sqrt{r^2+(\dfrac{h}{2})^2}$，解出 R

例 4 （1）一个正六棱柱的底面上正六边形，其侧棱垂直于底面，已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的体积为 $\dfrac{9}{8}$，底面周长为 3，则这个球的体积为___________________

解：设正六边形边长为 a，正六棱柱的高为 h，底面外接圆的关径为 r，则 $a=\dfrac{1}{2}$，

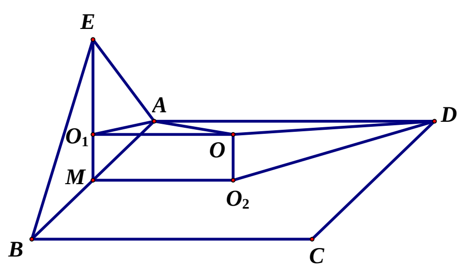
底面积为 $S=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$V_{柱}=Sh=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}h=\dfrac{9}{8}$，$\therefore h=\sqrt{3}$，$R^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2=1$，

$R=1$，球的体积为 $V=\dfrac{4\pi}{3}$

（2）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=120°$，则此球的表面积等于__________。

解：$BC=2\sqrt{3}$，$2r=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^{\circ}}=4$，$r=2$，$R=\sqrt{5}$，$S=20\pi$

（3）已知 ΔEAB 所在的平面与矩形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直，$EA=EB=3,AD=2,\angle AEB=60^{\circ}$，则多面体 $E-ABCD$ 的外接球的表面积为___________。16π



解析：折叠型，法一：ΔEAB的外接圆半径为$r_1=\sqrt{3}$，$OO_1=1$，

$R=\sqrt{1+3}=2$；法二：$O_1M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$r_2=O_2D=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$R^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{13}{4}=4$，$R=2$，$S=16\pi$

（4）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=4, AC=6, A=\dfrac{\pi}{3}, AA_1=4$则直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的外接球的表面积为__________。$\dfrac{160}{3}\pi$

解析：$BC^2=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}=28$，$BC=2\sqrt{7}$，$2r=\dfrac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，$r=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，

$R^2=r^2+(\dfrac{AA_1}{2})^2=\dfrac{28}{3}+4=\dfrac{40}{3}$，$S=\dfrac{160}{3}\pi$

类型五、折叠模型

题设：两个全等三角形或等腰三角形拼在一起，或菱形折叠(如图 11)

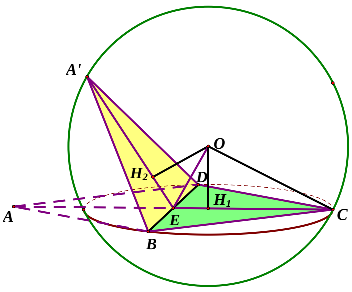


图11

第一步：先画出如图所示的图形，将ΔBCD画在小圆上，找出ΔBCD和$\Delta A'BD$的外心H_1和H_2；

第二步：过H_1和H_2分别作平面BCD和平面$A'BD$的垂线，两垂线的交点即为球心O，连接OE,OC；

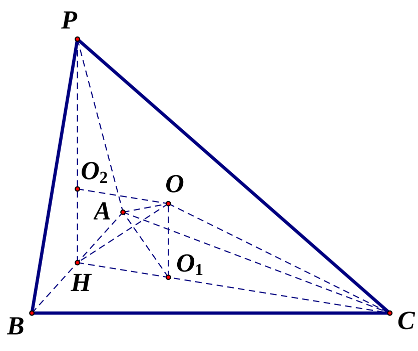
第三步：解ΔOEH_1，算出OH_1，在$Rt\Delta OCH_1$中，勾股定理：$OH_1^2+CH_1^2=OC^2$

例 5 三棱锥$P-ABC$中，平面$PAC\perp$平面ABC，$\triangle PAC$和$\triangle ABC$均为边长为2的正三角形，则三棱锥$P-ABC$外接球的半径为____________.

解析：$2r_1=2r_2=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$r_1=r_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$O_2H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

$R^2=O_2H^2+r_1^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$，$R=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$；

法二：$O_2H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$O_1H=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$AH=1$，



$R^2=AO^2=AH^2+O_1H^2+O_1O^2=\frac{5}{3}$， $R=\frac{\sqrt{15}}{3}$

类型六、对棱相等模型（补形为长方体）

题设：三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，求外接球半径（$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$）

第一步：画出一个长方体，标出三组互为异面直线的对棱；

第二步：设出长方体的长宽高分别为a,b,c，$AD=BC=x$，$AB=CD=y$，$AC=BD=z$，列方程组，

$$\begin{cases}a^2+b^2=x^2\\b^2+c^2=y^2\\c^2+a^2=z^2\end{cases}\Rightarrow(2R)^2=a^2+b^2+c^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{2},$$

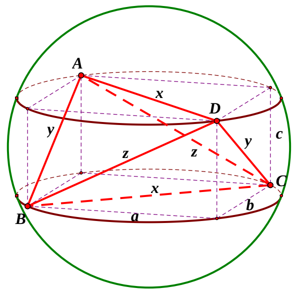


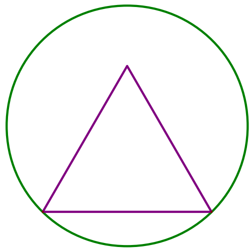
图12

补充：$V_{A-BCD}=abc-\frac{1}{6}abc\times4=\frac{1}{3}abc$

第三步：根据墙角模型，$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，

$R^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{8}$，$R=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{8}}$，求出$R$，

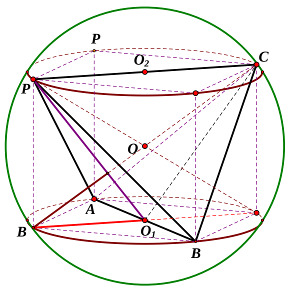
例如，正四面体的外接球半径可用此法。


(1)题

例 6（1）棱长为2的正四面体的四个顶点都在同一个球面上，若过该球球心的一个截面如图，则图中三角形(正四面体的截面)的面积是____________.

（2）一个正三棱锥的四个顶点都在半径为1的球面上，其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上，则该正三棱锥的体积是（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$



(1)题解答图

解：（1）截面为ΔPCO_1，面积是$\sqrt{2}$；

（2）高$h=R=1$，底面外接圆的半径为$R=1$，直径为$2R=2$，

设底面边长为a，则$2R=\frac{a}{\sin60^\circ}=2$，$a=\sqrt{3}$，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

三棱锥的体积为$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{\sqrt{3}}{4}$

（3）在三棱锥$A-BCD$中，$AB=CD=2,AD=BC=3,AC=BD=4,$则三棱锥$A-BCD$外接球的表面积为__________。$\frac{29}{2}\pi$

解析：如图 12，设补形为长方体，三个长度为三对面的对角线长，设长宽高分别为a,b,c，则$a^2+b^2=9$，

$b^2+c^2=4$，$c^2+a^2=16$ $\therefore$ $2(a^2+b^2+c^2)=9+4+16=29$，$2(a^2+b^2+c^2)=9+4+16=29$，

$a^2+b^2+c^2=\dfrac{29}{2}$，$4R^2=\dfrac{29}{2}$，$S=\dfrac{29}{2}\pi$

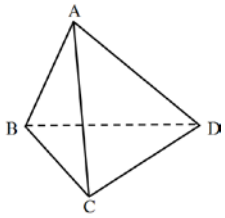
（4）如图所示三棱锥 $A-BCD$，其中 $AB=CD=5, AC=BD=6, AD=BC=7,$ 则该三棱锥外接球的表面积为______________.

解析：同上，设补形为长方体，三个长度为三对面的对角线长，设长宽高分别为 a,b,c，

$2(a^2+b^2+c^2)=25+36+49=110$，$a^2+b^2+c^2=55$，$4R^2=55$，$S=55\pi$

【55π；对称几何体；放到长方体中】

（5）正四面体的各条棱长都为 $\sqrt{2}$，则该正面体外接球的体积为_________



解析：这是特殊情况，但也是对棱相等的模式，放入长方体中，$2R=\sqrt{3}$，

$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$，

类型七、两直角三角形拼接在一起(斜边相同,也可看作矩形沿对角线折起所得三棱锥)模型

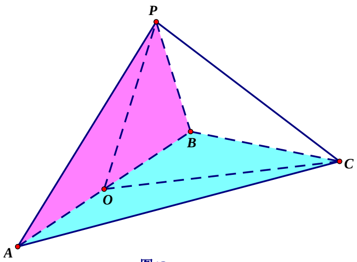


图13

题设：$\angle APB=\angle ACB=90^\circ$，求三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径（分析：取公共的斜边的中点 O，连接 OP,OC，则 $OA=OB=OC=OP=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore O$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心，然后在 OCP 中求出半径），当看作矩形沿对角线折起所得三棱锥时与折起成的二面角大小无关，只要不是平角球半径都为定值。

例 7（1）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为（　　）

A．$\dfrac{125}{12}\pi$　　B．$\dfrac{125}{9}\pi$　　C．$\dfrac{125}{6}\pi$　　D．$\dfrac{125}{3}\pi$

解：（1）$2R=AC=5$，$R=\dfrac{5}{2}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{125}{8}=\dfrac{125\pi}{6}$，选 C

（2）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，沿 BD 将矩形 $ABCD$ 折叠，连接 AC，所得三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为________________.

解析：（2）BD 的中点是球心 O，$2R=BD=\sqrt{13}$，$S=4\pi R^2=13\pi$；

类型八、锥体的内切球问题

1．题设：如图 14，三棱锥 $P-ABC$ 上正三棱锥，求其外接球的半径。

第一步：先现出内切球的截面图，E,H 分别是两个三角形的外心；

第二步：求 $DH=\dfrac{1}{3}BD$，$PO=PH-r$，PD 是侧面 ΔABP 的高；

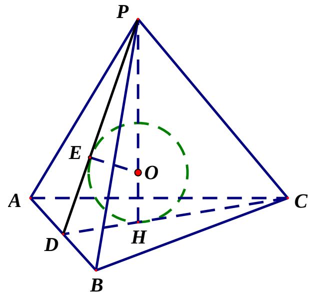


图14

第三步：由 ΔPOE 相似于 ΔPDH，建立等式：$\dfrac{OE}{DH}=\dfrac{PO}{PD}$，解出 r

2．题设：如图 15，四棱锥 $P-ABC$ 上正四棱锥，求其外接球的半径

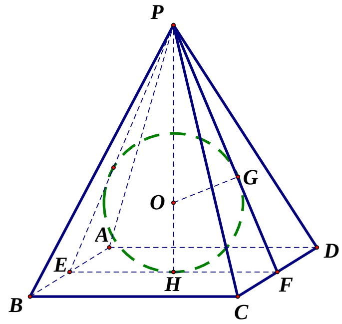


图15

第一步：先现出内切球的截面图，P,O,H 三点共线；

第二步：求 $FH=\dfrac{1}{2}BC$，$PO=PH-r$，PF 是侧面 ΔPCD 的高；

第三步：由 ΔPOG 相似于 ΔPFH，建立等式：$\dfrac{OG}{HF}=\dfrac{PO}{PF}$，解出

3．题设：三棱锥 $P-ABC$ 是任意三棱锥，求其的内切球半径

方法：等体积法，即内切球球心与四个面构成的四个三棱锥的体积之和相等

第一步：先画出四个表面的面积和整个锥体体积；

第二步：设内切球的半径为 r，建立等式：$V_{P-ABC}=V_{O-ABC}+V_{O-PAB}+V_{O-PAC}+V_{O-PBC}\Rightarrow$

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAB}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PAC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{PBC}\cdot r=\frac{1}{3}(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta PAB}+S_{PAC}+S_{\Delta PBC})\cdot r$$

第三步：解出 $r=\dfrac{3V_{P-ABC}}{S_{O-ABC}+S_{O-PAB}+S_{O-PAC}+S_{O-PBC}}$

习题：

1. 若三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，且 $SA=2$，$SB=SC=4$，则该三棱锥的外接球半径为（　　）

A. 3　　B. 6　　C. 36　　D. 9

解：【A】$(2R)^2=\sqrt{4+16+16}=6$，$R=3$

【三棱锥有一侧棱垂直于底面，且底面是直角三角形】【共两种】

2．三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 $SA\perp$ 平面 ABC，底面 ABC 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，$SA=2\sqrt{3}$，则该三棱锥的外接球体积等于_______．$\dfrac{32\pi}{3}$

解析：$2r=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$，$(2R)^2=4+12=16$，$R^2=4$，$R=2$，外接球体积 $\dfrac{4}{3}\pi\cdot 8=\dfrac{32\pi}{3}$

【外心法（加中垂线）找球心；正弦定理求球小圆半径】

3．正三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，侧棱长为 2，则该三棱锥的外接球体积等于_______．

解析：ΔABC 外接圆的半径为，三棱锥 $S-ABC$ 的直径为 $2R=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，外接球半径 $R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

或 $R^2=(R-\sqrt{3})^2+1$，$R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，外接球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{8}{3\sqrt{3}}=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$，

4．三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，△ PAC 边长为 2 的正三角形，$AB\perp BC$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为____________．

解析：ΔPAC 的外接圆是大圆，$2R=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

5．三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AC=2$，$PA=PC=3$，$AB\perp BC$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为____________．

解析：$\cos\angle P=\dfrac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\dfrac{9+9-4}{2\cdot 3\cdot 3}=\dfrac{7}{9}$，$\sin^2\angle P=1-(\dfrac{7}{9})^2=\dfrac{16\cdot 2}{81}$，$\sin\angle P=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，

$2R=\dfrac{2}{\dfrac{4\sqrt{2}}{9}}=\dfrac{9}{2\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$，$R=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$

6．三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AC=2$，$PA\perp PC$，$AB\perp BC$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为____________.

解：AC 是公共的斜边，AC 的中点是球心 O，球半径为 $R=1$