

2020年陕西省高三教学质量检测卷(二)

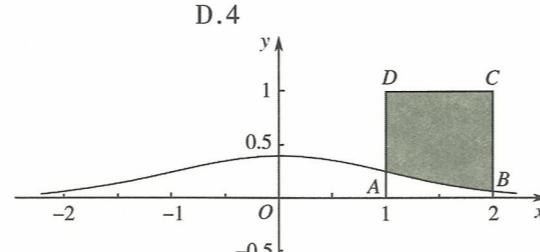
数学(理科)

注意事项:

1. 本试题卷共8页,满分150分,考试时间120分钟.
2. 答题前,考生务必把自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置.
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效.
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z = \frac{4}{1+i}$ (i为虚数单位),则 z 的虚部为 ()
A. 2 B. 2i C. -2 D. -2i
2. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 1\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | -1 < x \leq 1\}$
3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 3, \\ x - y + 1 \leq 0, \\ x + 2y - 6 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x - y$ 的最小值是 ()
A. -3 B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{10}{3}$
4. 已知向量 a, b 满足 $a = (1, \sqrt{3})$, $(a - 2b) \perp a$, 则 b 在 a 上的投影为 ()
A. -1 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 3, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(f(a)) = 1$, 则满足条件的实数 a 的个数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3
6. 设 $X \sim N(0, 1)$, 其正态分布密度曲线如图所示, 点 $A(1, 0)$, 点 $B(2, 0)$, 点 $C(2, 1)$, 点 $D(1, 1)$, 向正方形 $ABCD$ 内任意投掷一粒黄豆, 则该黄豆落入阴影部分的概率是 ()
(注: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$)
A. 0.8641 B. 0.6587 C. 0.5228 D. 0.9785



7. 在公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_3^2 = a_4 a_6$, 则 a_2 = ()

- A. $\frac{7}{11}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{1}{11}$

8. 已知 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. 若将函数 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 a ($a > 0$) 个单位长度, 所得图象关于坐标原点对称,

则 a 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{12}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

10. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AC = a$, $AA_1 = b$, 若该三棱柱的六个顶点都在同一个球面上, 且 $a + b = 2$, 则该球的表面积的最小值为 ()

- A. $\frac{7\pi}{3}$ B. $\frac{13\pi}{4}$ C. $\frac{52\pi}{21}$ D. $\frac{16\pi}{7}$

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 $M(3, 0)$, 直线 l 过焦点 F 且与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 8$, 则 $\triangle AMB$ 的面积为 ()

- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 8

12. 已知函数 $f(x) = xe^x + \frac{1}{2}x^2 + x + a$, $g(x) = x \ln x + 1$, 若存在 $x_1 \in [-2, 2]$, 对任意 $x_2 \in [\frac{1}{e^2}, e]$, 都有 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-3 - \frac{1}{e} - 2e^2, e - 3 - 2e^2]$ B. $(-3 - \frac{1}{e} - 2e^2, e - 3 - 2e^2)$
C. $[e - 3 - 2e^2, \frac{3}{2}]$ D. $(e - 3 - 2e^2, \frac{3}{2})$

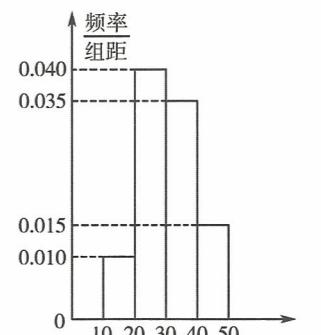
二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 如图是样本容量为1000的频率分布直方图,根据该图估计该样本数据的中位数与平均数的差的绝对值是_____.

14. 在 $(x+1)(ax+1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为15, 则 $a =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 的中点, 且 $AD:BD:AB = 1:\sqrt{7}:3$, 若 $BC = \sqrt{7}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 过双曲线 C 的左焦点 F 作一斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线交双曲线 C 的左支于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆过坐标原点 O , 则双曲线 C 的离心率为 _____.



三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

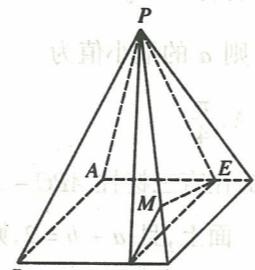
(一) 必考题:共 60 分.

17.(12分)

如图,正四棱锥 $P-ABCD$ 的底边长为 2,侧棱长为 $\sqrt{3}$, M 为 PC 上一点,且 $PM=3CM$,点 E, F 分别为 AD, BC 上的点,且 $AE=BF=3ED$.

(I) 证明:平面 $MEF \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 求锐二面角 $P-EF-M$ 的余弦值.



解: (I) 由已知得 $PA=PB=PC=PD=\sqrt{3}$,
 $AB=BC=CD=DA=2$,
 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PDC=\angle PDA=90^\circ$.
 $\therefore PA \perp AB, PB \perp BC, PD \perp DC, PD \perp DA$.
 $\therefore \triangle PAB \sim \triangle PBC \sim \triangle PDC \sim \triangle PDA$.

又 $AE=BF=3ED$,
 $\therefore \frac{PE}{ED}=\frac{PF}{FC}=\frac{PA}{AD}=\frac{PB}{BC}=\frac{PC}{CD}=3$.

由等比定理得 $EF \parallel AB$,
 $\therefore EF \perp BC, EF \perp CD, EF \perp DA$.
 $\therefore EF \perp$ 平面 PAB .

(II) 由(I)知 $PA \perp AB, PB \perp BC, PD \perp DC, PD \perp DA$,
 $\therefore PA \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore PA \perp BC$.

又 $BC \perp PC$,
 $\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

$\therefore PC \perp BC$,
 $\therefore PC \perp$ 平面 PBC .

又 $EF \perp$ 平面 PAB ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

又 $EF \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore EF \perp PC$.

由等比定理得 $EF \perp PC$,
 $\therefore EF \perp PC$.

18.(12分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1, 2S_n=a_na_{n+1}(n \in \mathbb{N}^*)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{2^n}$, 令 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$, 求证: $T_n < n \cdot 2^{n+1}$.

(二) 填空题(每小题 5 分,共 25 分)

(待定) 等比

解: (I) 由 $2S_n=a_na_{n+1}$, 得 $2S_{n-1}=a_{n-1}a_n$,
 $\therefore 2a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_{n+1}$,
 $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$,
 $\therefore \{a_n\}$ 是等比数列.

由 $a_1=1, 2S_n=a_na_{n+1}$, 得 $2a_1=a_1a_2$,
 $\therefore a_2=2$.

设公比为 q , 则 $a_3=a_2q=2q, a_4=a_3q=2q^2, a_5=a_4q=2q^3, \dots$

由 $2S_n=a_na_{n+1}$, 得 $2S_4=a_4a_5$,
 $\therefore 2(a_1+a_2+a_3+a_4)=a_4a_5$.

将 $a_1=1, a_2=2, a_3=2q, a_4=2q^2, a_5=2q^3$ 代入上式, 得 $2(1+2+2q+2q^2)=2q^2 \cdot 2q^3$,

即 $1+2+2q+2q^2=2q^5$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5=1+2+2q+2q^2>0$,
 $\therefore q^5>0$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$,
 $\therefore q^5-1=2(q+1)^2(q^2-q+1)$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$,

即 $q^5-1=2(q+1)^2(q^2-q+1)$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

由 $q+1>0$, 得 $q>-1$,
 $\therefore q>0$.

由 $q>0$, 得 $q^5>0$,
 $\therefore q^5=1+2+2q+2q^2$.

由 $q^5=1+2+2q+2q^2$, 得 $q^5-1=2+2q+2q^2$.

由 $q>0$, 得 $q^5-1>0$,
 $\therefore 2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$.

由 $2(q+1)^2(q^2-q+1)>0$, 得 $(q+1)^2>0$,
 $\therefore q+1>0$.

- 19.(12分) 某市正在进行创建全国文明城市的复验工作,为了解市民对“创建全国文明城市”的知识知晓程度,某权威调查机构对市民进行随机调查,并对调查结果进行统计,共分为优秀和一般两类,先从结果中随机抽取100份,统计得出如下 2×2 列联表:

	优秀	一般	总计
男	25	25	50
女	30	20	50
总计	55	45	100

- (I)根据上述列联表,是否有85%的把握认为“创城知识的知晓程度是否为优秀与性别有关”?
- (II)现从调查结果为一般的市民中,按分层抽样的方法从中抽取9人,然后再从这9人中随机抽取3人,求这三位市民中男女都有的概率;
- (III)以样本估计总体,视样本频率为概率,从全市市民中随机抽取10人,用 X 表示这10人中优秀的人数,求随机变量 X 的期望和方差.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad (\text{其中 } n = a + b + c + d).$$

- 20.(12分) 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$ ($a \in \mathbb{R}$).
- (I)求函数 $f(x)$ 的极值;
- (II)当 $3 < a < 4$ 时,若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 求证: $-\frac{5}{e^3} < \frac{f(x_1)}{f(x_2)} < -\frac{3}{e^4}$.

21.(12分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 P 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$, 且椭圆 C 上任意一点到 P 点的最大距离为 $\sqrt{7}$.
 (I) 求椭圆 C 的标准方程;
 (II) 若过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 点 M 为椭圆 C 长轴上的一点, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 P 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$, 且椭圆 C 上任意一点到 P 点的最大距离为 $\sqrt{7}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 点 M 为椭圆 C 长轴上的一点, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 P 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$, 且椭圆 C 上任意一点到 P 点的最大距离为 $\sqrt{7}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 点 M 为椭圆 C 长轴上的一点, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.



(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{8}{2+t}, \\ y = \frac{4t}{2+t} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点,

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$.

(I) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 若射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho > 0$) 与直线 l 和曲线 C 分别交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

(I) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 若射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho > 0$) 与直线 l 和曲线 C 分别交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

100.0	200.0	010.0	220.0	20.0	01.0	21.0	($\rho < 0$)
808.01	878.7	260.8	450.2	148.5	808.5	270.5	68

$$\frac{(ad - bc)\pi}{(b + c + d + a)(b + a)(b + c)(d + a)} = \frac{\pi}{8}$$

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设函数 $f(x) = |x - 1| + |x - t|$ ($t > 0$) 的最小值为 1.

(I) 求 t 的值;

(II) 若 $a^3 + b^3 = t$ ($a, b \in \mathbb{R}^*$), 求证: $a + b \leq 2$.