湖北省部分省级示范性重点中学教科研协作体
2020 届高三统一联合考试
数学(理科)试题

本试卷分第 I 卷（选择题 60 分）和第 II 卷（非选择题 90 分）两部分，满分 150 分，

考试时间 120 分钟.

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前，务必在试卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致. 务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位.
2. 答第 I 卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.
3. 答第 II 卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰. 作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚. 必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效.
4. 考试结束后，务必将试卷和答题卡一并上交.

第 I 卷（选择题　满分 60 分）

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确的答案填涂在答题卡上。）

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid(x-3-4\cos\theta)^2+(y-5-4\sin\theta)^2=4,\theta\in R\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+4y-19=0\}$. 记集合 $P=A\cap B$，则集合 P 所表示的轨迹的长度为

A. $8\sqrt{2}$　　B. $8\sqrt{3}$　　C. $8\sqrt{5}$　　D. $8\sqrt{6}$

2. 已知复数 z 满足 $z\cdot\bar{z}=4$ 且 $z+\bar{z}+|z|=0$，则 z^{2019} 的值为

A. -1　　B. -2^{2019}　　C. 1　　D. 2^{2019}

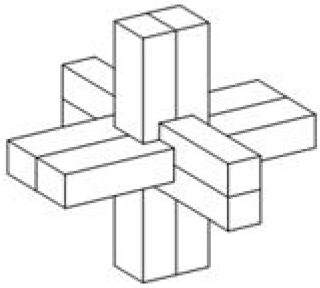
3. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $a=5\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})$，$c=5$ 且 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 OG 的最小值为

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\frac{5\sqrt{2}-5}{6}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\frac{10-5\sqrt{2}}{6}$

4. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上有三点 P,Q,R 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{CA}$，则 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值为

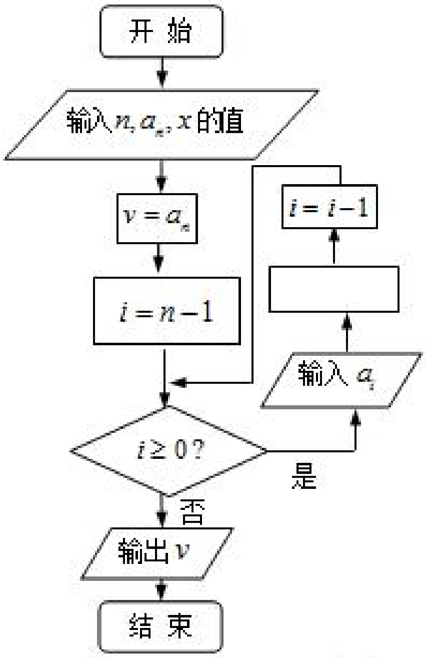
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

5. 鲁班锁是中国传统的智力玩具，起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构，它的外观是如图所示的十字立方体，其上下、左右、前后完全对称，六根完全一样的正四棱柱体分成三组，经90°榫卯起来. 若正四棱柱的高为6，底面正方形的边长为1，现将该鲁班锁放进一个球形容器(容器壁的厚度忽略不计)，则该球形容器表面积的最小值为



A. 41π　　　　B. 42π　　　　C. 43π　　　　D. 44π

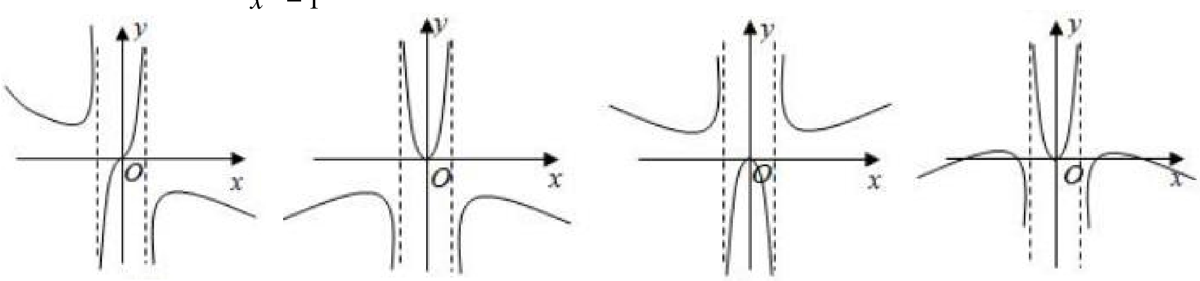
6. 南宋时期的数学家秦九韶在他的著作《数书九章》中提出了计算多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的值的算法，即将 $f(x)$ 改写成如下形式：$f(x)=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})+\cdots+a_1)x+a_0$，首先计算最内层一次多项式的值，然后由内向外逐层计算一次多项式的值，这种算法至今仍是比较先进的算法，将秦九韶算法用程序框图表示如图，则在空白的执行框内应填入



A. $v=vx+a_i$　　　　B. $v=v(x+a_i)$　　　　C. $v=a_ix+v$　　　　D. $v=a_i(x+v)$

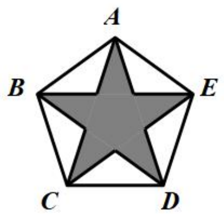
7. 著名数学家华罗庚先生曾说过：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休.”在数学的学习和研究中，经常用函数的图象来研究函数的性质，也经常用函数的解析式来琢磨函数的图象的特征，

如函数 $f(x)=\dfrac{x(e^x-e^{-x})}{x^2-1}$ 的图象大致是



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

8. 中华人民共和国的国旗是五星红旗，旗面左上方缀着五颗黄色五角星，四颗小星环拱在一颗大星之后，并各有一个角尖正对大星的中心点，象征着中国共产党领导下的革命人民大团结和中国人民对党的衷心拥护. 五角星可以通过正五边形连接对角线得到，如图所示，在正五边形 $ABCDE$ 内部任取一点，则该点取自阴影部分的概率为



A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$　　C. $\dfrac{(\sqrt{5}-1)^3}{4}$　　D. $\dfrac{(\sqrt{5}-1)^4}{4}$

9. 已知函数 $f(x)=e^x(x+1)^2$，令 $f_1(x)=f'(x)$，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，若$f_n(x)=e^x(a_nx^2+b_nx+c_n)$，记数列$\{\dfrac{2a_n}{2c_n-b_n}\}$的前 n 项和为 S_n，则下列选项中与 S_{2019} 的值最接近的是

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{7}{4}$　　D. $\dfrac{9}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=(\cos\theta+1)\cos 2x+\cos\theta(\cos x+1)$，有下述四个结论：

①$f(x)$ 是偶函数；

②$f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减；

③当$\theta\in[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}]$ 时，有 $|f(x)|<\dfrac{7}{5}$；

④当$\theta\in[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}]$ 时，有 $|f'(x)|<\dfrac{14}{5}$；

其中所有真命题的编号是

A.①③　　B.②④　　C.①③④　　D.①④

11. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，点$O$为坐标原点，点$P$在双曲线的右支上，且满足$|F_1F_2|=2|OP|$. 若直线$PF_2$与双曲线$C$只有一个交点，则双曲线$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-(3a-2)x^2-8x+12a+7$，$g(x)=\ln x$，记 $h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$，若$h(x)$至少有三个零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-\dfrac{1}{10})$　　B. $(\dfrac{1}{8},+\infty)$　　C. $[-\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{8})$　　D. $[-\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{8}]$

第Ⅱ卷（非选择题　满分 90 分）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请在答题卷的相应区域答题.）

13. 已知 x,y 均为正数，则 $\dfrac{x+y}{2x^2+y^2+6}$ 的最大值是__________.

14. 在中美组织的暑假中学生交流会结束时，中方组织者将孙悟空、猪八戒、沙和尚、唐三藏、白龙马的彩色陶俑各一个送给来中国参观的美国中学生汤姆、杰克、索菲娅，每个人至少一个，且猪八戒的彩色陶俑不能送给索菲娅，则不同的送法种数为__________.

15. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 为椭圆 C 上不与左右顶点重合的动点，设 I,G 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心和重心. 当直线 IG 的倾斜角不随着点 P 的运动而变化时，椭圆 C 的离心率为__________.

16. 已知函数 $f(x)=2ax^3+(3a-1)x^2+1$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 仅在 $x=1$ 处取得最大值，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请在答题卷的相应区域答题. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.）

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的中 $a_1=1$， $a_2=2$，且满足 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}=\dfrac{n}{1+\sqrt{a_{n+1}}}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

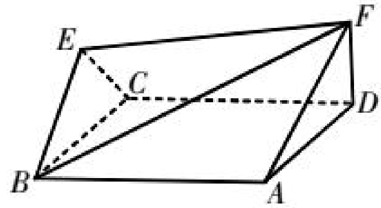
(2) 设 $b_n=\dfrac{(-1)^n a_{2n+1}}{a_na_{n+1}}$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n， 若 $\left|T_n+1\right|<\dfrac{1}{2020}$，求 n 的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

如图所示，菱形 $ABCD$ 与正三角形 BCE 的边长均为 2，它们所在的平面互相垂直，$DF\perp$ 平面 $ABCD$ 且 $DF=\sqrt{3}$.

(1) 求证： $EF\parallel$ 平面 $ABCD$；

(2) 若 $\angle ABC=\angle BCE$，求二面角 $A-BF-E$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

已知点$P(x,y)$是平面内的动点，定点$F(1,0)$，定直线 l：$x=-1$与x轴交于点E，过点P作$PQ\perp l$于点Q，且满足$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

(1) 求动点P 的轨迹τ的方程；

(2) 过点F作两条互相垂直的直线l_1和l_2，分别交曲线τ于点A,B和点C,D. 设线段AB和线段CD的中点分别为M和N，记线段MN的中点为K，点 O为坐标原点，求直线OK的斜率k的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=a(\ln x+\dfrac{2}{x}+2)-\dfrac{e^{x-1}}{x^2}-1$在定义域$(0,2)$内有两个极值点.

(1) 求实数a的取值范围；

(2) 设x_1和x_2是$f(x)$的两个极值点，求证：$\ln x_1+\ln x_2+\ln a>0$.

21.（本小题满分 12 分）

冠状病毒是一个大型病毒家族，已知可引起感冒以及中东呼吸综合征（*MERS*）和严重急性呼吸综合征（*SARS*）等较严重疾病. 而今年出现在湖北武汉的新型冠状病毒（*nCoV*）是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株. 人感染了新型冠状病毒后常见体征有呼吸道症状、发热、咳嗽、气促和呼吸困难等. 在较严重病例中，感染可导致肺炎、严重急性呼吸综合征、肾衰竭，甚至死亡.

某医院为筛查冠状病毒, 需要检验血液是否为阳性, 现有$n\left(n\in N^*\right)$份血液样本, 有以下两种检验方式：

方式一：逐份检验, 则需要检验n次.

方式二：混合检验, 将其中$k\left(k\in N^*且k\geqslant 2\right)$份血液样本分别取样混合在一起检验. 若检验结果为阴性, 这k份的血液全为阴性, 因而这k份血液样本只要检验一次就够了, 如果检验结果为阳性, 为了明确这k份血液究竟哪几份为阳性, 就要对这k份再逐份检验, 此时这k份血液的检验次数总共为$k+1$.

假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的, 且每份样本是阳性结果的概率为$p\left(0<p<1\right)$. 现取其中$k\left(k\in N^*且k\geqslant 2\right)$份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为ξ_1, 采用混合检验方式, 样本需要检验的总次数为ξ_2.

(1) 若$E(\xi_1)=E(\xi_2)$, 试求p关于k的函数关系式$p=f(k)$;

(2) 若p与干扰素计量x_n相关，其中x_1，x_2，$\cdots$，x_n $(n\geq 2)$是不同的正实数，

满足$x_1=1$且$\forall n\in N^*\left(n\geq 2\right)$都有$e^{-\frac{1}{3}}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{{x_n}^2}{x_i x_{i+1}}=\dfrac{{x_n}^2-{x_1}^2}{{x_2}^2-{x_1}^2}$.

(ⅰ) 求证：数列$\{x_n\}$为等比数列；

(ⅱ) 当$p=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x_4}}$时，采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数的期望值更少，求k的最大值.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时，请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目后的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

已知在平面直角坐标系 xoy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{1-t^2} \end{cases}$ (t 为参数).

以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

(1) 求曲线 C 和直线 l 的直角坐标方程；

(2) 若直线 l 交曲线 C 于 A,B 两点，交 x 轴于点 P，求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）

[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x-1|-|2x+1|$.

(1) 求不等式 $|f(x)|\le 4$ 的解集；

(2) 若 a,b,c 均为正数，求证：$f(x)\le\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.