高中数学知识点汇总（基础）

一、集合和命题

一、集合：

（1）集合的元素的性质：

确定性、互异性和无序性；

（2）元素与集合的关系：

①$a \in A \leftrightarrow a$ 属于集合 A；

②$a \notin A \leftrightarrow a$ 不属于集合 A.

（3）常用的数集：

$N \leftrightarrow$ 自然数集； $N^* \leftrightarrow$ 正整数集； $Z \leftrightarrow$ 整数集；

$Q \leftrightarrow$ 有理数集； $R \leftrightarrow$ 实数集； $\Phi \leftrightarrow$ 空集； $C \leftrightarrow$ 复数集；

$\begin{cases} Z^+ \leftrightarrow \text{正整数集} \\ Z^- \leftrightarrow \text{负整数集} \end{cases}$； $\begin{cases} Q^+ \leftrightarrow \text{正有理数集} \\ Q^- \leftrightarrow \text{负有理数集} \end{cases}$； $\begin{cases} R^+ \leftrightarrow \text{正实数集} \\ R^- \leftrightarrow \text{负实数集} \end{cases}$.

（4）集合的表示方法：

集合$\begin{cases} \text{有限集} \leftrightarrow \text{列举法} \\ \text{无限集} \leftrightarrow \text{描述法} \end{cases}$；

例如：①列举法：$\{z,h,a,n,g\}$；②描述法：$\{x|x>1\}$.

（5）集合之间的关系：

①$A \subseteq B \leftrightarrow$ 集合 A 是集合 B 的子集；特别地，$A \subseteq A$；$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{cases} \Rightarrow A \subseteq C$.

②$A=B$ 或$\begin{cases} A \subseteq B \\ A \supseteq B \end{cases} \leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 相等；

③$A \subsetneqq B \leftrightarrow$ 集合 A 是集合 B 的真子集.

例：$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$；$N \subsetneqq Z \subsetneqq Q \subsetneqq R \subsetneqq C$.

④空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

（6）集合的运算：

①交集：$A \cap B = \{x|x \in A \text{且} x \in B\} \leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 的交集；

②并集：$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}\leftrightarrow$集合 A 与集合 B 的并集；

③补集：设U为全集，集合A是U的子集，则由U中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在全集U中的补集，记作$C_U A$.

④得摩根定律：$C_U(A\cap B)=C_U A\cup C_U B$；$C_U(A\cup B)=C_U A\cap C_U B$

（7）集合的子集个数：

若集合A有$n(n\in N^*)$个元素，那么该集合有2^n个子集；2^n-1个真子集；2^n-1个非空子集；2^n-2个非空真子集.

二、四种命题的形式：

（1）命题：能判断真假的语句.

（2）四种命题：如果用α和β分别表示原命题的条件和结论，用$\overline{\alpha}$和$\overline{\beta}$分别表示α和β的否定，那么四种命题形式就是：

命题	原命题	逆命题	否命题	逆否命题
表示形式	若α，则β	若β，则α；	若$\overline{\alpha}$，则$\overline{\beta}$；	若$\overline{\beta}$，则$\overline{\alpha}$.
逆命题关系	原命题$\leftrightarrow$逆命题		逆否命题$\leftrightarrow$否命题	
否命题关系	原命题$\leftrightarrow$否命题		逆否命题$\leftrightarrow$逆命题	
逆否命题关系 同真同假关系	原命题$\leftrightarrow$逆否命题		逆命题$\leftrightarrow$否命题	

（3）充分条件，必要条件，充要条件：

①若$\alpha\Rightarrow\beta$，那么α叫做β的充分条件，β叫做α的必要条件；

②若$\alpha\Rightarrow\beta$且$\beta\Rightarrow\alpha$，即$\alpha\Leftrightarrow\beta$，那么$\alpha$既是$\beta$的充分条件，又是$\beta$的必要条件，也就是说，$\alpha$是$\beta$的充分必要条件，简称充要条件.

③欲证明条件α是结论β的充分必要条件，可分两步来证：

第一步：证明充分性：条件$\alpha\Rightarrow$结论β；

第二步：证明必要性：结论$\beta\Rightarrow$条件α.

（4）子集与推出关系：

设 A、 B 是非空集合， $A=\{x|x具有性质\alpha\}$， $B=\{y|y具有性质\beta\}$，

则 $A\subseteq B$ 与 $\alpha\Rightarrow\beta$ 等价.

结论：小范围 $\Rightarrow$ 大范围；例如：小明是上海人 $\Rightarrow$ 小明是中国人.
小范围是大范围的充分非必要条件；
大范围是小范围的必要非充分条件.

二、不等式

一、不等式的性质：

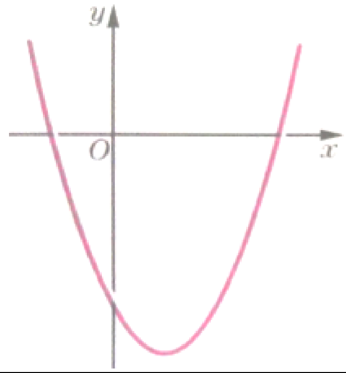
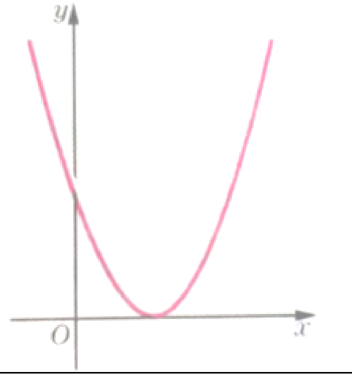
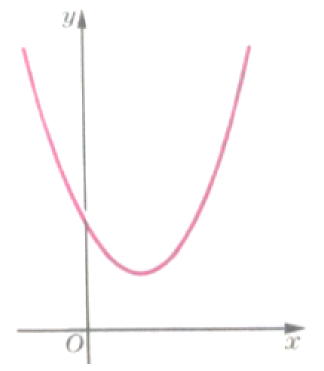
不等式的性质	1、 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$；	2、 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$；
	3、 $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；	4、 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；
	5、 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；	6、 $a>b>0\Rightarrow 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；
	7、 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in N^*)$；	8、 $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N^*,n>1)$.

二、一元一次不等式：

一元一次不等式 $ax>b$	$a>0$	$a<0$	$a=0$	
			$b\ge 0$	$b<0$
解集	$x>\frac{b}{a}$	$x<\frac{b}{a}$	Φ	R

三、一元二次不等式：

$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根的判别式	$\triangle=b^2-4ac>0$	$\triangle=b^2-4ac=0$	$\triangle=b^2-4ac<0$

<table>
<tr><td>$y=ax^2+bx+c(a>0)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c=0(a>0)$</td><td>$\{x_1,x_2\}$，$x_1<x_2$</td><td>$\{x_0\}$</td><td>Φ</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c>0(a>0)$</td><td>$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$</td><td>$(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$</td><td>$R$</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c<0(a>0)$</td><td>(x_1,x_2)</td><td>Φ</td><td>Φ</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c\ge 0(a>0)$</td><td>$(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$</td><td>$R$</td><td>$R$</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c\le 0(a>0)$</td><td>$[x_1,x_2]$</td><td>$\{x_0\}$</td><td>Φ</td></tr>
</table>

四、含有绝对值不等式的性质：

（1）$|a|+|b|\ge|a\pm b|\ge|a|-|b|$；　（2）$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\ge|a_1+a_2+\cdots+a_n|$.

五、分式不等式：

（1）$\dfrac{ax+b}{cx+d}>0\Leftrightarrow(ax+b)(cx+d)>0$；　（2）$\dfrac{ax+b}{cx+d}<0\Leftrightarrow(ax+b)(cx+d)<0$.

六、含绝对值的不等式：

<table>
<tr><td colspan="2">$|x|<a$</td><td colspan="2">$|x|>a$</td><td colspan="3">$|x|\le a$</td><td colspan="3">$|x|\ge a$</td></tr>
<tr><td>$a>0$</td><td>$a\le 0$</td><td>$a\ge 0$</td><td>$a<0$</td><td>$a>0$</td><td>$a=0$</td><td>$a<0$</td><td>$a>0$</td><td>$a=0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td>$-a<x<a$</td><td>Φ</td><td>$x>a$或$x<-a$</td><td>R</td><td>$-a\le x\le a$</td><td>$x=0$</td><td>Φ</td><td>$x\ge a$或$x\le -a$</td><td colspan="2">R</td></tr>
</table>

七、指数不等式：

（1）$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}(a>1)\Leftrightarrow f(x)>\varphi(x)$；　（2）$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}(0<a<1)\Leftrightarrow f(x)<\varphi(x)$.

八、对数不等式：

（1）$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)(a>1) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)>0 \\ f(x)>\varphi(x) \end{cases}$；

（2）$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)(0<a<1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<\varphi(x) \end{cases}$.

九、不等式的证明：

（1）常用的基本不等式：

①$a^2+b^2 \geq 2ab(a、b\in R$，当且仅当$a=b$时取“$=$”号)；

②$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}(a、b\in R^+$，当且仅当$a=b$时取“$=$”号)；

补充公式：$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

③$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc(a、b、c\in R^+$，当且仅当$a=b=c$时取“$=$”号)；

④$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}(a、b、c\in R^+$，当且仅当$a=b=c$时取“$=$”号)；

⑤$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$($n$为大于1的自然数，$a_1,a_2,\cdots,a_n \in R^+$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时取“$=$”号)；

（2）证明不等式的常用方法：

①比较法；　②分析法；　③综合法.

三、函数的基本性质

一、函数的概念：

（1）若**自变量**$x \xrightarrow{\text{对应法则}f}$**因变量**$y$，则$y$就是$x$的函数，记作$y=f(x),x\in D$；

x的取值范围$D \leftrightarrow$函数的**定义域**；y的取值范围$\leftrightarrow$函数的**值域**.

求定义域一般需要注意：

① $y=\dfrac{1}{f(x)}$， $f(x)\neq 0$； ② $y=\sqrt[n]{f(x)}$， $f(x)\geq 0$；

③ $y=(f(x))^0$， $f(x)\neq 0$； ④ $y=\log_a f(x)$， $f(x)>0$；

⑤ $y=\log_{f(x)} N$， $f(x)>0$ 且 $f(x)\neq 1$．

（2）判断是否函数图像的方法：任取平行于 y 轴的直线，与图像最多只有一个公共点；

（3）判断两个函数是否同一个函数的方法：①定义域是否相同；②对应法则是否相同．

二、函数的基本性质：

（1）奇偶性：

函数	$y=f(x),x\in D$		
前提条件	“定义域 D 关于 0 对称”成立		①“定义域 D 关于 0 对称”； ②“ $f(x)=f(-x)$ ”；③ “ $f(x)=-f(-x)$ ” ①不成立**或者** $\begin{cases}\text{①成立}\\ \text{②、③都不成立}\end{cases}$
	$f(x)=f(-x)$ 成立	$f(x)=-f(-x)$ 成立	
奇偶性	偶函数	奇函数	非奇非偶函数
奇偶函数图像性质	关于 y 轴对称	关于 $O(0,0)$ 对称	

注意：定义域包括 0 的奇函数必过原点 $O(0,0)$．

（2）单调性和最值：

前提条件	$y=f(x),x\in D$， $I\subseteq D$， 任取 $x_1,x_2\in$ 区间 I
单调增函数	$\begin{cases}x_1<x_2\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1>x_2\\ f(x_1)>f(x_2)\end{cases}$
单调减函数	$\begin{cases}x_1<x_2\\ f(x_1)>f(x_2)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1>x_2\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}$
最小值 $y_{\min}=f(x_0)$	任取 $x\in D$, 存在 $x_0\in D$, $f(x)\geq f(x_0)$
最大值 $y_{\max}=f(x_0)$	任取 $x\in D$, 存在 $x_0\in D$, $f(x)\leq f(x_0)$

注意：

①复合函数的单调性：

函数	单调性			
外函数 $y=f(x)$	□	□	□	□
内函数 $y=g(x)$	□	□	□	□
复合函数 $y=f[g(x)]$	□	□	□	□

②如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 上是增（减）函数，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**单调函数**，区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调区间**.

（3）零点：若 $y=f(x),x\in D$，$c\in D$ 且 $f(c)=0$，则 $x=c$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

零点定理：$\begin{cases} y=f(x),x\in[a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{存在}x_0\in(a,b) \\ f(x_0)=0 \end{cases}$；**特别地**，当 $y=f(x),x\in[a,b]$ 是**单调函数**，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则该函数在区间 $[a,b]$ 上**有且仅有**一个零点，即存在**唯一** $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.

（4）平移的规律：“左加右减，下加上减”.

函数	向左平移 k	向右平移 k	向上平移 h	向下平移 h	备注
$y=f(x)$	$y=f(x+k)$	$y=f(x-k)$	$y-h=f(x)$	$y+h=f(x)$	$k,h>0$

（5）对称性：

①轴对称的两个函数：

函数	$y=f(x)$					
对称轴	x 轴	y 轴	$y=x$	$y=-x$	$x=m$	$y=n$
函数	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$x=f(y)$	$-x=f(-y)$	$y=f(2m-x)$	$2n-y=f(x)$

②中心对称的两个函数：

函数	对称中心	函数
$y=f(x)$	(m,n)	$2n-y=f(2m-x)$

③轴对称的函数：

函数	$y=f(x)$	
对称轴	y 轴	$x=m$
条件	$f(x)=f(-x)$	$f(x)=f(2m-x)$

注意： $f(a+x)=f(b-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称；

$f(a+x)=f(a-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=a$ 对称；

$f(x)=f(-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=0$ 对称，即 $f(x)$ 是偶函数.

④中心对称的函数：

函数	$y=f(x)$
对称中心	(m,n)
条件	$f(x)=2n-f(2m-x)$

注意： $f(a+x)+f(b-x)=c\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2})$ 对称；

$f(a+x)+f(b-x)=0\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(\dfrac{a+b}{2},0)$ 对称；

$f(a+x)+f(a-x)=2b\Rightarrow f(x)$ 关于点 (a,b) 对称；

$f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f(x)$ 关于点 $(0,0)$ 对称，即 $f(x)$ 是奇函数.

（6）凹凸性：

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果对任意 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是凹函数；例如： $y=x^2$.

进一步，如果对任意 $x_1,x_2,\cdots x_n\in D$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是凹函数；该不等式也称琴生不等式或詹森不等式；

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果对任意 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是凸函数．例如： $y=\lg x$．

进一步，如果对任意 $x_1,x_2,\cdots x_n\in D$，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是凸函数；该不等式也称琴生不等式或詹森不等式．

（7）翻折：

函数	翻折后	翻折过程
$y=f(x)$	$y=f(\lvert x\rvert)$	将 $y=f(x)$ 在 y 轴右边的图像不变，并将其翻折到 y 轴左边，**并覆盖**．
	$\lvert y\rvert=f(x)$	将 $y=f(x)$ 在 x 轴上边的图像不变，并将其翻折到 x 轴下边，**并覆盖**．
	$\lvert y\rvert=f(\lvert x\rvert)$	第一步：将 $y=f(x)$ 在 y 轴右边的图像不变，并将其翻折到左边，**并覆盖**； 第二步：将 x 轴上边的图像不变，并将其翻折到 x 轴下边，**并覆盖**．
	$y=\lvert f(x)\rvert$	将 $y=f(x)$ 在 x 轴上边的图像保持不变，并将 x 轴下边的图像翻折到 x 轴上边，**不覆盖**．

（8）周期性：

若 $y=f(x),x\in R$，$\exists T\neq 0$，任取$x\in R$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 T 为这个函数的周期．

注意：若 T 是 $y=f(x)$ 的周期，那么 $kT(k\in Z,k\neq 0)$ 也是这个函数的周期；

周期函数的周期有无穷多个，但不一定有最小正周期．

① $f(x+a)=f(x+b)$，$a\neq b\Rightarrow$ $f(x)$ 是周期函数，且其中一个周期 $T=\lvert a-b\rvert$；

（阴影部分下略）

② $f(x)=-f(x+p)$，$p\neq 0\Rightarrow T=2p$；

③ $f(x+a)=-f(x+b)$，$a\neq b\Rightarrow T=2|a-b|$；

④ $f(x)=\dfrac{1}{f(x+p)}$ 或 $f(x)=-\dfrac{1}{f(x+p)}$，$p\neq 0\Rightarrow T=2p$；

⑤ $f(x)=\dfrac{1-f(x+p)}{1+f(x+p)}$ 或 $f(x)=\dfrac{f(x+p)+1}{f(x+p)-1}$，$p\neq 0\Rightarrow T=2p$；

⑥ $f(x)=\dfrac{1+f(x+p)}{1-f(x+p)}$ 或 $f(x)=\dfrac{f(x+p)-1}{f(x+p)+1}$，$p\neq 0\Rightarrow T=4p$；

⑦ $f(x)$ 关于直线 $x=a$，$x=b$，$a\neq b$ 都对称 $\Rightarrow T=2|a-b|$；

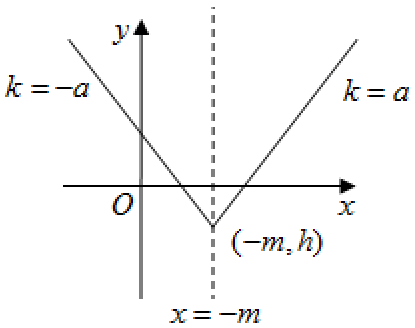
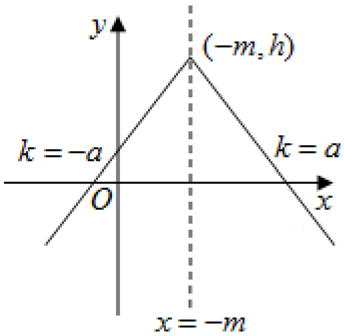
⑧ $f(x)$ 关于两点 (a,c)，(b,c)，$a\neq b$ 都成中心对称 $\Rightarrow T=2|a-b|$；

⑨ $f(x)$ 关于点 (a,c)，$a\neq 0$ 成中心对称，且关于直线 $x=b$，$a\neq b$ 对称 $\Rightarrow T=4|a-b|$；

⑩若 $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)+\cdots+f(x+na)=m$（$m$ 为常数，$n\in N^{*}$），则 $f(x)$ 是以 $(n+1)a$ 为周期的周期函数；

若 $f(x)-f(x+a)+f(x+2a)-\cdots+f(x+na)=m$（$m$ 为常数，n 为正偶数），则 $f(x)$ 是以 $2(n+1)a$ 为周期的周期函数.

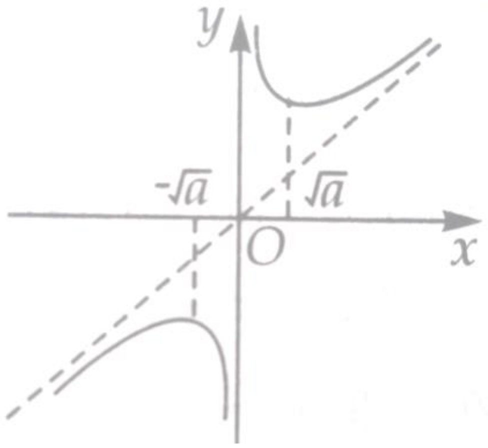
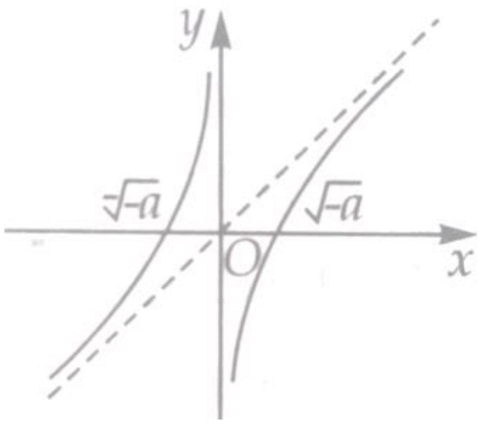
三、**V 函数：**

定义	形如 $y=a\|x+m\|+h(a\neq 0)$ 的函数，称作 **V 函数**.	
分类	$y=a\|x+m\|+h,a>0$	$y=a\|x+m\|+h,a<0$
图像		

<table>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2">R</td></tr>
<tr><td>值域</td><td>$[h,+\infty)$</td><td>$(-\infty,h]$</td></tr>
<tr><td>对称轴</td><td colspan="2">$x=-m$</td></tr>
<tr><td>开口</td><td>向上</td><td>向下</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td colspan="2">$(-m,h)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $(-\infty,-m]$ 上单调递减；
在 $[-m,+\infty)$ 上单调递增.</td><td>在 $(-\infty,-m]$ 上单调递增；
在 $[-m,+\infty)$ 上单调递减.</td></tr>
<tr><td>注意</td><td colspan="2">当 $m=0$ 时，该函数为偶函数</td></tr>
</table>

四、分式函数：

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">形如 $y=x+\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 的函数，称作分式函数.</td></tr>
<tr><td>分类</td><td>$y=x+\frac{a}{x},a>0$（耐克函数）</td><td>$y=x+\frac{a}{x},a<0$</td></tr>
</table>

图像		
定义域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	
值域	$(-\infty,-2\sqrt{a}]\cup[2\sqrt{a},+\infty)$	R
渐近线	$x=0$，$y=x$	
单调性	在 $(-\infty,-\sqrt{a}]$，$[\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增； 在 $[-\sqrt{a},0)$，$(0,\sqrt{a}]$ 上单调递减.	在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增；

五、曼哈顿距离：

在平面上，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则称 $d=\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|$ 为 MN 的曼哈顿距离.

六、某类带有绝对值的函数：

1、对于函数 $y=|x-m|$，在 $x=m$ 时取最小值；

2、对于函数 $y=|x-m|+|x-n|$，$m<n$，在 $x\in[m,n]$ 时取最小值；

3、对于函数 $y=|x-m|+|x-n|+|x-p|$，$m<n<p$，在 $x=n$ 时取最小值；

4、对于函数 $y=|x-m|+|x-n|+|x-p|+|x-q|$，$m<n<p<q$，在 $x\in[n,p]$ 时取最小值；

5、推广到 $y=|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_{2n}|$，$x_1<x_2<\cdots<x_{2n}$，在 $x\in[x_n,x_{n+1}]$ 时取最小值；

$y=|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_{2n+1}|$，$x_1<x_2<\cdots<x_{2n+1}$，在 $x\in x_n$ 时取最小值.

思考：对于函数 $y=|x-1|+2|x|+3|x+2|$，在 x________时取最小值.

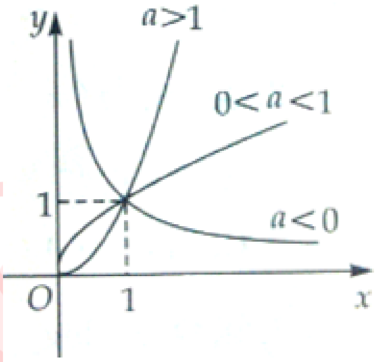
四、幂函数、指数函数和对数函数

（一）幂函数

（1）幂函数的定义：

形如 $y=x^a(a\in R)$ 的函数称作幂函数，定义域因 a 而异.

（2）当 $a\neq 0,1$ 时，幂函数 $y=x^a(a\in R)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的图像分三类，如图所示.



①当 $a<0$ 时，函数单调递减；

②当 $a>0$ 时，函数单调递增，其中 $a>1$ 时比 $0<a<1$ 时，函数的增长率更大些.

（3）作幂函数 $y=x^a(a\neq 0,1)$ 的草图，可分两步：

①根据 a 的大小，作出该函数在区间 $[0,+\infty)$ 上的图像；

②根据该函数的定义域及其奇偶性，补全该函数在 $(-\infty,0]$ 上的图像.

（4）判断幂函数 $y=x^a(a\in R)$ 的 a 的大小比较：

方法一： $y=x^a(a\in R)$ 与直线 $x=m(m>1)$ 的交点越靠上， a 越大；

方法二： $y=x^a(a\in R)$ 与直线 $x=m(0<m<1)$ 的交点越靠下， a 越大

（5）关于形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$ 的变形幂函数的作图：

①作渐近线（用虚线）： $x=-\dfrac{d}{c}$、 $y=\dfrac{a}{c}$；

②选取特殊点：任取该函数图像上一点，建议取$(0,\dfrac{b}{d})$；

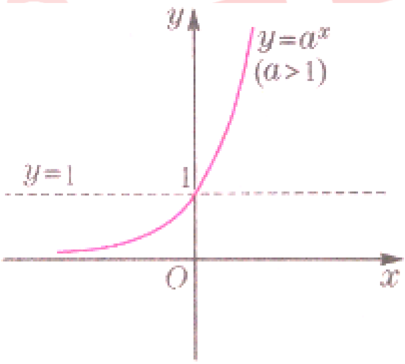
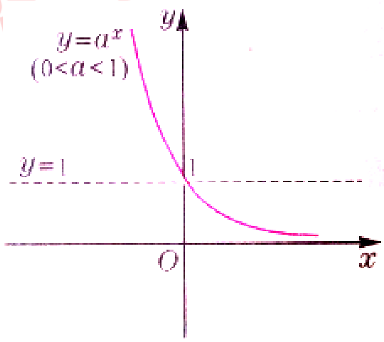
③画出大致图像：结合渐近线和特殊点，判断图像的方位（右上左下、左上右下）.

（二）指数&指数函数

1、指数运算法则：

①$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$；②$(a^x)^y = a^{xy}$；③$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$；④$(\dfrac{a}{b})^x = \dfrac{a^x}{b^x}$，其中$(a,b>0, x、y \in R)$.

2、指数函数图像及其性质：

/	$y=a^x(a>1)$	$y=a^x(0<a<1)$
图像		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
奇偶性	非奇非偶函数	
渐近线	x轴	
单调性	在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；	在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；
性质	①指数函数$y=a^x$的函数值恒大于零；	

	②指数函数 $y=a^x$ 的图像经过点 $(0,1)$；	
	③当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$．	③当 $x>0$ 时，$0<y<1$； 当 $x<0$ 时，$y>1$．

3、判断指数函数 $y=a^x$ 中参数 a 的大小：

方法一：$y=a^x$ 与直线 $x=m(m>0)$ 的交点越靠上，a 越大；

方法二：$y=a^x$ 与直线 $x=m(m<0)$ 的交点越靠下，a 越大．

（三）反函数的概念及其性质

1、反函数的概念：

对于函数 $y=f(x)$，设它的定义域为 D，值域为 A，如果对于 A 中任意一个值 y，在 D 中总有唯一确定的 x 值与它对应，且满足 $y=f(x)$，这样得到的 x 关于 y 的函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．在习惯上，自变量常用 x 表示，而函数用 y 表示，所以把它改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in A)$．

2、求反函数的步骤：（“解” → “换” → “求”）

①将 $y=f(x)$ 看作方程，解出 $x=f(y)$；

②将 x、y 互换，得到 $y=f^{-1}(x)$；

③标出反函数的定义域（原函数的值域）．

3、反函数的条件：

定义域与值域中的元素一一对应．

4、反函数的性质：

①原函数 $y=f(x)$ 过点 (m,n)，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 过点 (n,m)；

②原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称，且单调性相同；

③奇函数的反函数必为奇函数.

5、原函数与反函数的关系：

/	函数 $y=f(x)$	$y=f^{-1}(x)$
定义域	D	A
值域	A	D

（四）对数&对数函数

1、指数与对数的关系：

	a	b	N
$a^b=N$	底数	指数	幂
$\log_a N=b$		对数	真数

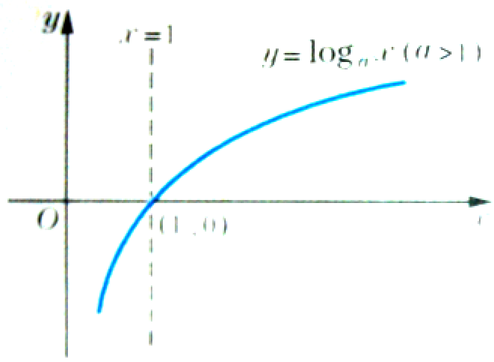
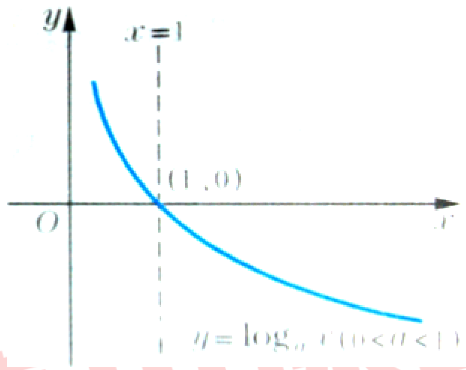
2、对数的运算法则：

①$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$a^{\log_a N}=N$；②常用对数 $\lg N=\log_{10} N$，自然对数 $\ln N=\log_e N$；

③ $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a M^n=n\log_a M$；

④ $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$，$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$，$\log_{a^c} b^c=\log_a b$，$a^{\log_N b}=b^{\log_N a}$.

3、对数函数图像及其性质：

/	$y=\log_a x(a>1)$	$y=\log_a x(0<a<1)$
图像		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	R	
奇偶性	非奇非偶函数	
渐近线	y 轴	
单调性	在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；	在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；
性质	①对数函数 $y=\log_a x$ 的图像在 y 轴的右方； ②对数函数 $y=\log_a x$ 的图像经过点 $(1,0)$；	
	③当 $x>1$ 时，$y>0$； 当 $0<x<1$ 时，$y<0$．	③当 $x>1$ 时，$y<0$； 当 $0<x<1$ 时，$y>0$．

4、判断对数函数 $y=\log_a x, x>0$ 中参数 a 的大小：

方法一：$y=\log_a x, x>0$ 与直线 $y=m(m>0)$ 的交点越靠右，a 越大；

方法二：$y=\log_a x, x>0$ 与直线 $y=m(m<0)$ 的交点越靠左，a 越大.

五、三角比

1、角的定义：

（1）终边相同的角：

①α 与 $2k\pi+\alpha, k\in Z$ 表示终边相同的角度；

②终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同；

③α 与 $k\pi+\alpha, k\in Z$ 表示终边共线的角（同向或反向）.

（2）特殊位置的角的集合的表示：

位置	角的集合
在 x 轴正半轴上	$\{\alpha \mid \alpha=2k\pi, k\in Z\}$
在 x 轴负半轴上	$\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\pi, k\in Z\}$
在 x 轴上	$\{\alpha \mid \alpha=k\pi, k\in Z\}$
在 y 轴正半轴上	$\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$
在 y 轴负半轴上	$\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z\}$
在 y 轴上	$\{\alpha \mid \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$
在坐标轴上	$\{\alpha \mid \alpha=\frac{k\pi}{2}, k\in Z\}$
在第一象限内	$\{\alpha \mid 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$
在第二象限内	$\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi, k\in Z\}$

在第三象限内	$\{\alpha \mid 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z\}$
在第四象限内	$\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,k\in Z\}$

（3）弧度制与角度制互化：

①$\pi rad=180^\circ$；　②$1rad=\frac{180}{\pi}^\circ$；　③$1^\circ=\frac{\pi}{180}rad$．

（4）扇形有关公式：

①$|\alpha|=\frac{l}{r}$；

②弧长公式：$l=\alpha r$；

③扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$（想象三角形面积公式）．

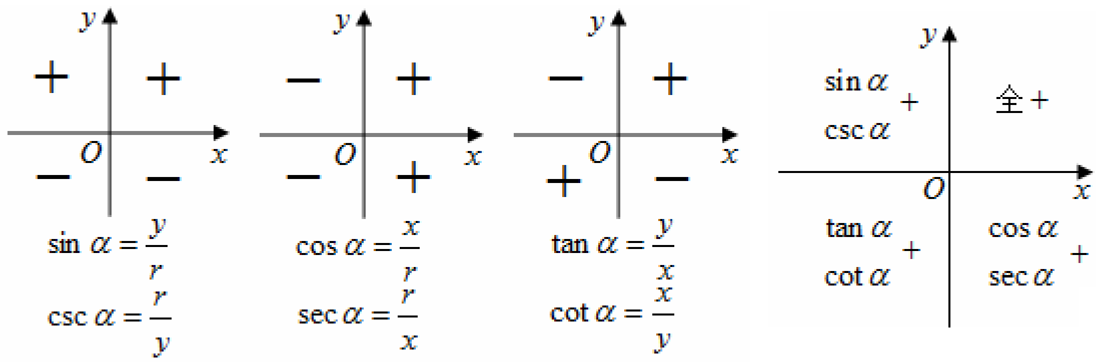
（5）集合中常见角的合并：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x=2k\pi\\x=2k\pi+\pi\end{array}\right\}x=k\pi\\ \left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}x=\frac{k\pi}{2}\\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\end{array}\right\}x=k\pi+\frac{\pi}{4}\\ \left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\\x=2k\pi-\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}x=k\pi-\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}x=\frac{k\pi}{4},k\in Z$$

（6）三角比公式及其在各象限的正负情况：

以角α的顶点为坐标原点，始边为x轴的正半轴建立直角坐标系，在α的终边上任取一个异

于原点的点 $P(x,y)$，点 P 到原点的距离记为 r，则



（7）特殊角的三角比：

α	角度制	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无	0	无	0

（8）一些重要的结论：（注意，如果没有特别指明，k 的取值范围是 $k\in Z$）

①角 α 和角 β 的终边：

角 α 和角 β 的终边		
关于 x 轴对称	关于 y 轴对称	关于原点对称
$\begin{cases}\sin\alpha=-\sin\beta\\ \cos\alpha=\cos\beta\\ \tan\alpha=-\tan\beta\end{cases}$	$\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\\ \tan\alpha=-\tan\beta\end{cases}$	$\begin{cases}\sin\alpha=-\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\\ \tan\alpha=\tan\beta\end{cases}$

②α 的终边与 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边的关系.

α 的终边在第一象限 $\Leftrightarrow \alpha\in(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\in(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4})$；

α 的终边在第二象限 $\Leftrightarrow \alpha\in(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\in(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2})$；

α 的终边在第三象限 $\Leftrightarrow \alpha\in(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\in(k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{3\pi}{4})$；

α 的终边在第四象限 $\Leftrightarrow \alpha\in(2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\in(k\pi+\frac{3\pi}{4},k\pi+\pi)$.

③$\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的大小关系：

$\sin\theta<\cos\theta \Leftrightarrow \theta\in(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \theta$ 的终边在直线 $y=x$ 右边（$x-y>0$）；

$\sin\theta>\cos\theta \Leftrightarrow \theta\in(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}) \Leftrightarrow \theta$ 的终边在直线 $y=x$ 左边（$x-y<0$）；

$\sin\theta=\cos\theta \Leftrightarrow \theta\in\{2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\} \Leftrightarrow \theta$ 的终边在直线 $y=x$ 上（$x-y=0$）.

④$|\sin\theta|$ 与 $|\cos\theta|$ 的大小关系：

$|\sin\theta|<|\cos\theta| \Leftrightarrow \theta\in(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \theta$ 的终边在 $\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y<0\\x-y<0\end{cases}$；

$|\sin\theta|>|\cos\theta| \Leftrightarrow \theta\in(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow \theta$ 的终边在 $\begin{cases}x+y>0\\x-y<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y>0\\x-y<0\end{cases}$；

$|\sin\theta|=|\cos\theta| \Leftrightarrow \theta\in\{k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\}$， $k\in Z \Leftrightarrow \theta$ 的终边在 $y=\pm x$.

2、三角比公式：

（1）诱导公式：（诱导公式口诀：奇变偶不变，符号看象限）

第一组诱导公式： 第二组诱导公式： 第三组诱导公式：

（周期性）

$$\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

（奇偶性）

$$\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

（中心对称性）

$$\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

第四组诱导公式：（轴对称）

$$\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

第五组诱导公式：（互余性）

$$\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\\ \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha\end{cases}$$

第六组诱导公式：

$$\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha\\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\\ \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha\end{cases}$$

（2）同角三角比的关系：

倒数关系：

$$\begin{cases}\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1\\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1\\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\end{cases}$$

商数关系：

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha\neq0)\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\sin\alpha\neq0)\end{cases}$$

平方关系：

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\\ 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha\end{cases}$$

（3）两角和差的正弦公式：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

两角和差的余弦公式：$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

两角和差的正切公式：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$．

（4）二倍角的正弦公式：$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

二倍角的余弦公式：$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$；

二倍角的正切公式：$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

降次公式：

万能置换公式：

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\\ \tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\ 1-\sin\alpha=\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\\ 1+\sin\alpha=\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\end{cases};\qquad \begin{cases}\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{cases}$$

半角公式：$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

（5）辅助角公式：

①版本一：

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中$0\le\varphi<2\pi,\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$.

②版本二：

$a\sin\theta\pm b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta\pm\varphi)$，其中$a,b>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2},\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

3、正余弦函数的五点法作图：

以$y=\sin(\omega x+\varphi)$为例，令$\omega x+\varphi$依次为$0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2},2\pi$，求出对应的$x$与$y$值，描点$(x,y)$作图.

4、正弦定理和余弦定理：

（1）正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R(R$为外接圆半径$)$；

其中常见的结论有：

①$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

②$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；

③$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$；

④$S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$；$S_{\triangle ABC}=\begin{cases}aR\sin B\sin C\\ bR\sin A\sin C\\ cR\sin A\sin B\end{cases}$；$S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$.

（2）余弦定理：版本一：$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$；版本二：$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab} \end{cases}$；

（3）任意三角形射影定理（第一余弦定理）：$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$.

5、与三角形有关的三角比：

（1）三角形的面积：

①$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}dh$；

②$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$；

③$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\dfrac{l}{2}\cdot\left(\dfrac{l}{2}-a\right)\left(\dfrac{l}{2}-b\right)\left(\dfrac{l}{2}-c\right)}$，$l$ 为$\triangle ABC$的周长.

（2）在$\triangle ABC$中，

①$a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow \sin A>\sin B\Leftrightarrow \cos A<\cos B\Leftrightarrow \cot A<\cot B$；

②若$\triangle ABC$是锐角三角形，则$\sin A>\cos B$；

③$\begin{cases} \sin(A+B)=\sin C \\ \sin(B+C)=\sin A \\ \sin(A+C)=\sin B \end{cases}$；$\begin{cases} \cos(A+B)=-\cos C \\ \cos(B+C)=-\cos A \\ \cos(A+C)=-\cos B \end{cases}$；$\begin{cases} \tan(A+B)=-\tan C \\ \tan(B+C)=-\tan A \\ \tan(A+C)=-\tan B \end{cases}$；

④$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2} \\ \sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{A+C}{2} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A+B}{2} \end{cases}$；$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{B+C}{2} \\ \tan\dfrac{B}{2}=\cot\dfrac{A+C}{2} \\ \tan\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A+B}{2} \end{cases}$；

⑤$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}<\cos\dfrac{B}{2} \\ \sin\dfrac{A}{2}<\cos\dfrac{C}{2} \end{cases}$；$\begin{cases} \sin\dfrac{B}{2}<\cos\dfrac{A}{2} \\ \sin\dfrac{B}{2}<\cos\dfrac{C}{2} \end{cases}$；$\begin{cases} \sin\dfrac{C}{2}<\cos\dfrac{A}{2} \\ \sin\dfrac{C}{2}<\cos\dfrac{B}{2} \end{cases}$；

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\\ \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{cases}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

⑥ $$\begin{cases}\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\ \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\ \sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{cases};$$

$$\begin{cases}\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C\\ \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1\end{cases};$$

⑦ $$\begin{cases}\sin A+\sin B+\sin C\in(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}]\\ \cos A+\cos B+\cos C\in(1,\frac{3}{2}]\end{cases};\quad\begin{cases}\sin A\sin B\sin C\in(0,\frac{3\sqrt{3}}{8}]\\ \sin A\sin B\sin C>\cos A\cos B\cos C\\ \cos A\cos B\cos C\in(-1,\frac{1}{8}]\end{cases}.$$

其中，第一组可以利用琴生不等式来证明；第二组可以结合第一组及基本不等式证明.

（3）在$\triangle ABC$中，角A、B、C成等差数列$\Leftrightarrow B=\frac{\pi}{3}$.

（4）$\triangle ABC$的内切圆半径为$r=\frac{2S}{a+b+c}$.

6、仰角、俯角、方位角：

略

7、和差化积与积化和差公式（理科）：

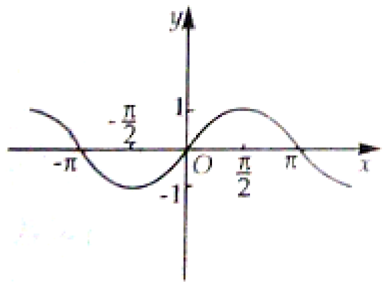
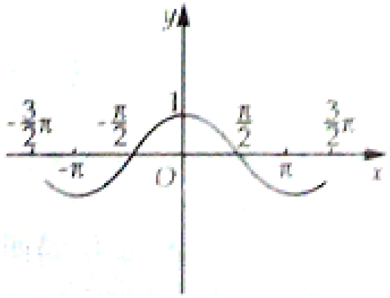
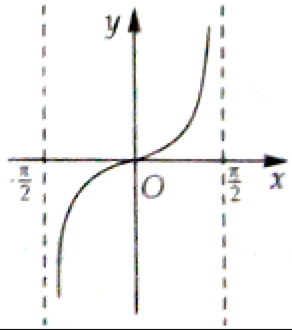
（1）积化和差公式：
$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\end{cases};$$

（2）和差化积公式：$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$.

六、三角函数

1、正弦函数、余弦函数和正切函数的性质、图像：

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	R	R	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	最小正周期$T=2\pi$	最小正周期$T=2\pi$	最小正周期$T=\pi$
单调性	$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$□； $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$□． （$k\in Z$）	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$□； $[2k\pi,2k\pi+\pi]$□． （$k\in Z$）	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$□ （$k\in Z$）
最值	当$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时，$y_{\min}=-1$；	当$x=2k\pi+\pi$时，$y_{\min}=-1$；	无

	当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$；	当 $x=2k\pi$ 时，$y_{\max}=1$；	
图像			

例 1：求函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的周期、单调区间和最值.（当 x 的系数为负数时，单调性相反）

解析：周期 $T=\left|\dfrac{2\pi}{2}\right|=\pi$，由函数 $y=\sin x$ 的递增区间 $[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$，可得

$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $k\pi-\dfrac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，

于是，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 的递增区间为 $[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}]$.

同理可得函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 递减区间为 $[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{7\pi}{12}]$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{12}$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 取最大值 5；

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\dfrac{5\pi}{12}$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 取最大值 -5.

例 2：求函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7,x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 的单调区间和最值.

解析：由 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，可得 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$.

然后画出 $2x+\dfrac{\pi}{3}$ 的终边图，然后就可以得出

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$，即 $x\in[0,\dfrac{\pi}{12}]$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 单调递增；

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{4\pi}{3}]$，即 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}]$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 单调递减.

同时，当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 取最大值 12；

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 取最小值 $7-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$；

注意：当 x 的系数为负数时，单调性的分析正好相反．

2、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ & $y=A\cos(\omega x+\varphi)+h$ & $y=A\tan(\omega x+\varphi)+h$，其中 $A>0,\varphi\neq0$：

（1）复合三角函数的基本性质：

三角函数	$y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 其中 $A>0,\varphi\neq0$	$y=A\cos(\omega x+\varphi)+h$ 其中 $A>0,\varphi\neq0$	$y=A\tan(\omega x+\varphi)+h$ 其中 $A>0,\varphi\neq0$
振幅	A		无
基准线	$y=h$		
定义域	$(-\infty,+\infty)$		$\{x\mid \omega x+\varphi\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$
值域	$[A-h,A+h]$		$(-\infty,+\infty)$
最小正周期	$T=\left\|\frac{2\pi}{\omega}\right\|$		$T=\left\|\frac{\pi}{\omega}\right\|$
频率	$f=\frac{1}{T}=\left\|\frac{\omega}{2\pi}\right\|$		$f=\frac{1}{T}=\left\|\frac{\omega}{\pi}\right\|$
相位	$\omega x+\varphi$		
初相	φ		

（2）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 与函数 $y=\sin x$ 的图像的关系如下：

①相位变换：

当 $\varphi>0$ 时， $y=\sin x \xrightarrow{\text{向左平移}|\varphi|\text{个单位}} y=\sin(x+\varphi)$；

当 $\varphi<0$ 时， $y=\sin x \xrightarrow{\text{向右平移}|\varphi|\text{个单位}} y=\sin(x+\varphi)$；

②周期变换：

当 $\omega>1$ 时， $y=\sin(x+\varphi) \xrightarrow{\text{所有各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍（纵坐标不变）}} y=\sin(\omega x+\varphi)$；

当$0<\omega<1$时，$y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow{\text{所有各点的横坐标伸长到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍（纵坐标不变）}}y=\sin(\omega x+\varphi)$；

③振幅变换：

当$A>1$时，$y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{所有各点的纵坐标伸长到原来的}A\text{倍（横坐标不变）}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$；

当$0<A<1$时，$y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{所有各点的纵坐标缩短到原来的}A\text{倍（横坐标不变）}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$；

④最值变换：

当$h>0$时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{所有各点向上平行移动}|h|\text{个单位}}y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$；

当$h<0$时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{所有各点向下平行移动}|h|\text{个单位}}y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$；

注意：函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)+h$和函数$y=A\tan(\omega x+\varphi)+h$的变换情况同上.

3、三角函数的值域：

（1）$y=a\sin x+b$型：

设$t=\sin x$，化为一次函数$y=at+b$在闭区间$[-1,1]$上求最值.

（2）$y=a\sin x\pm b\cos x+c$，$a,b>0$型：

引入辅助角$\varphi,\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，化为$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)+c$.

（3）$y=a\sin^2 x+b\sin x+c$型：

设$t=\sin x\in[-1,1]$，化为二次函数$y=at^2+bt+c$求解.

（4）$y=a\sin x\cos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$型：

设$t=\sin x\pm\cos x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则$t^2=1\pm2\sin x\cos x$，化为二次函数$y=\pm\dfrac{a(t^2-1)}{2}+bt+c$在闭区间$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$上求最值.

（5）$y=a\tan x+b\cot x$型：

设 $t=\tan x$，化为 $y=at+\dfrac{b}{t}$，用“Nike 函数”或“差函数”求解.

（6）$y=\dfrac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$ 型：

方法一：常数分离、分层求解；方法二：利用有界性，化为 $-1\le\sin x\le 1$ 求解.

（7）$y=\dfrac{a\sin x+b}{c\cos x+d}$ 型：

化为 $a\sin x-yc\cos x=b-dy$，合并 $\sqrt{a^2+y^2c^2}\sin(x+\varphi)=b-dy$，利用有界性，

$\sin(x+\varphi)=\dfrac{b-dy}{\sqrt{a^2+y^2c^2}}\in[-1,1]$ 求解.

（8）$a\sin x\cos x+b\sin^2 x+c\cos^2 x$，（$a\ne 0,b,c$ 不全为 0）型：

利用降次公式，可得 $a\sin x\cos x+b\sin^2 x+c\cos^2 x=\dfrac{a}{2}\sin 2x+\dfrac{c-b}{2}\cos 2x+\dfrac{b+c}{2}$，然后利用辅助角公式即可.

4、三角函数的对称性：

	对称中心	对称轴方程
$y=\sin x$	$(k\pi,0)$，$k\in Z$	$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$
$y=\cos x$	$(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0)$，$k\in Z$	$x=k\pi$，$k\in Z$
$y=\tan x$	$(\dfrac{k\pi}{2},0)\ k\in Z$	/
$y=\cot x$	$(\dfrac{k\pi}{2},0)\ k\in Z$	/

备注：① $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的对称中心在其函数图像上；

② $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的对称中心不一定在其函数图像上.（有可能在渐近线上）

例 3：求函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 的对称轴方程和对称中心.

解析：由函数 $y=\sin x$ 的对称轴方程 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，可得 $2x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$

解得 $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in Z$.

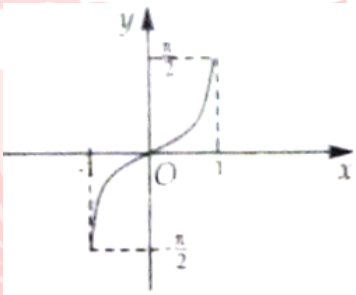
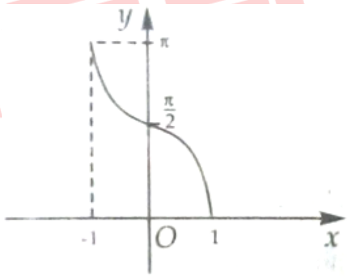
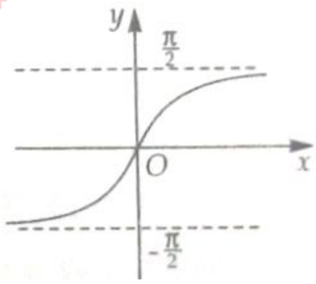
所以，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 的对称轴方程为 $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in Z$.

由函数 $y=\sin x$ 的中心对称点 $(k\pi,0)$，$k\in Z$，可得 $2x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$

解得 $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in Z$．

所以，函数 $y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+7$ 的对称中心为 $(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},7)$，$k\in Z$．

5、反正弦、反余弦、反正切函数的性质和图像：

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	在 $[-1,1]$ 上是增函数	在 $[-1,1]$ 上是减函数	在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数
对称中心	点 $(0,0)$	点 $(0,\dfrac{\pi}{2})$	点 $(0,0)$
图像			

重要结论：

（1）先反三角函数后三角函数：

①$a\in[-1,1]\Rightarrow\sin(\arcsin a)=\cos(\arccos a)=a$；

②$a\in R\Rightarrow\tan(\arctan a)=a$．

（2）先三角函数后反三角函数：

①$\theta\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]\Rightarrow\arcsin(\sin\theta)=\theta$；

②$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow\arccos(\cos\theta)=\theta$；

③$\theta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\Rightarrow\arctan(\tan\theta)=\theta$．

（3）反三角函数对称中心特征方程式：

①$a\in[-1,1]\Rightarrow \arcsin(-a)=-\arcsin a$；

②$a\in[-1,1]\Rightarrow \arccos(-a)=\pi-\arccos a$；

③$a\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow \arctan(-a)=-\arctan a$.

6、解三角方程公式：

$$\begin{cases}\sin x=a,|a|\le 1 & x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in Z\\ \cos x=a,|a|\le 1 & x=2k\pi\pm\arccos a,k\in Z\\ \tan x=a,a\in R & x=k\pi+\arctan a,k\in Z\end{cases}.$$