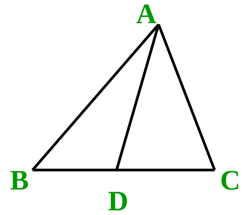
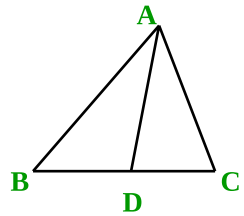
23 个具有深度的几何类专题--tobeenough

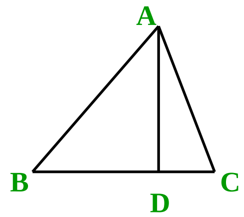
[例 1]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，D是BC边上的中点，中线$AD=m_a$，求$m_a=m_a(a,b,c)$的解析式.



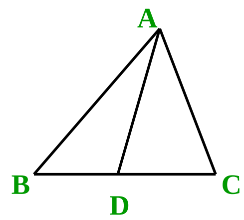
[例 2]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，AD是$\angle BAC$的平分线，$AD=t_a$，求$t_a=t_a(a,b,c)$的解析式.



[例 3]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，AD是BC的高，$AD=h_a$，求$h_a=h_a(a,b,c)$的解析式.

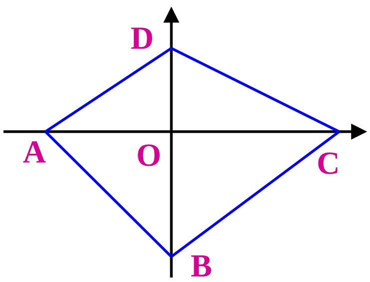


[例 4]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，D是BC边上的点，$AD=y$，$BD=x$，求$y=y(x)$的解析式.

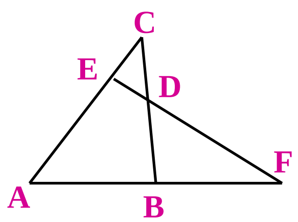


[例 5]、如图已知，在直角坐标系xOy中，A,B,C,D点的坐标分别为：$A(-a,0)$，$B(0,-b)$，$C(c,0)$，$D(0,d)$.

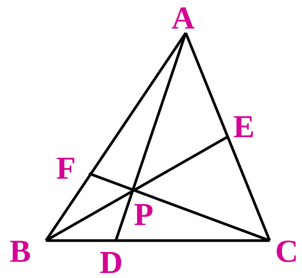
求证：$(a+c)(b+d)\le\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+c^2)}$



[例 6]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\dfrac{AE}{EC}=3$，$\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{1}{2}$，求$BF=?$

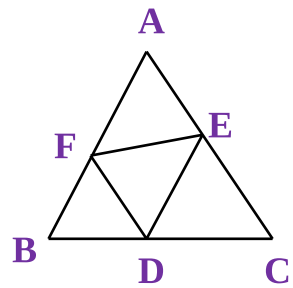


[例 7]、如图已知ΔABC的三个边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，P是ΔABC的任意内点，连接AP延线交BC于D，连接BP延线交CA于E，连接CP延线交AB于F．

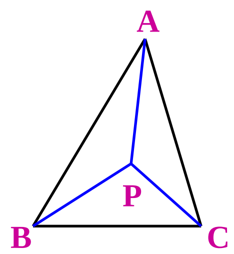


求证：(1) $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$；(2) $\dfrac{AP}{AD}+\dfrac{BP}{BE}+\dfrac{CP}{CF}=2$

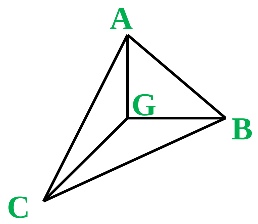
[例 8]、如图已知锐角ΔABC的三个边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，D,E,F分别是BC,CA,AB边上的点，求：ΔDEF的周长$S=DE+EF+FD$的最小值.



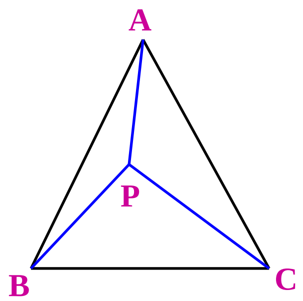
[例 9]、如图已知锐角ΔABC的三个边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，P是ΔABC的内点，求P点到ΔABC三个顶点的距离之和$L=PA+PB+PC$的最小值.



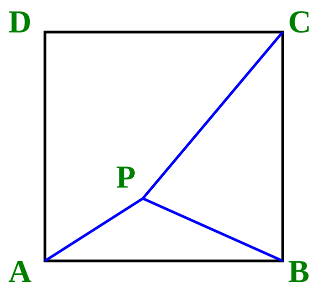
[例 10]、如图已知，G为ΔABC的重心，$GA=3$，$GB=4$，$GC=5$，求ΔABC的面积.



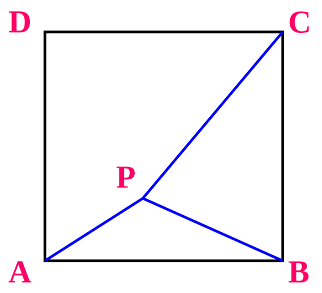
[例 11]、如图已知，P是等边ΔABC的一个内点，满足$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求ΔABC的周长.



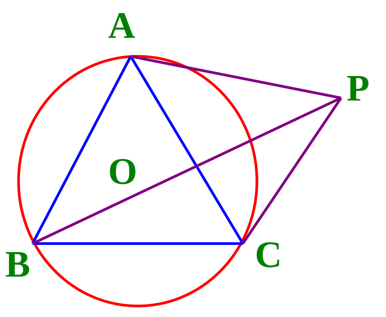
[例 12]、如图已知正方形 $ABCD$ 内有一点 P，若 $PA=a$，$PB=2a$，$PC=3a$，求正方形 $ABCD$ 的周长.



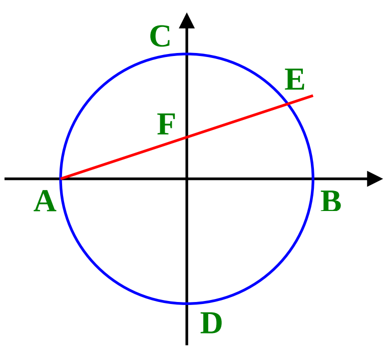
[例 13]、如图已知正方形 $ABCD$ 内有一点 P，若 P 到 A,B,C 三点的距离之和有最小值，当最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 时，求此正方形 $ABCD$ 的周长



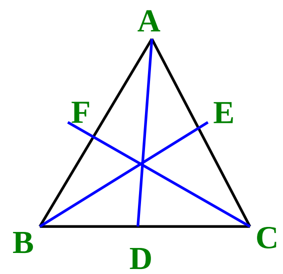
[例 14]、设等边 ΔABC 的外接圆圆心为 O，圆半径为 R，P 是圆外一点，$OP=D>R$，求由线段 PA，PB，PC 所构成的三角形的面积 $S=?$



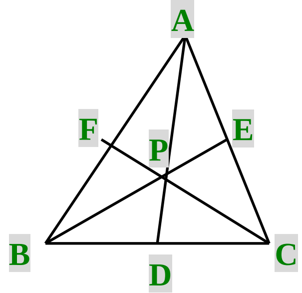
[例 15]、如图已知，半径为 $R=\sqrt{2}$ 的圆 O 其圆心在原点，圆 O 与 x 轴相交于 A,B，与 y 轴相交于 CD. 过 A 的任意一直线交圆 O 于 E，交 y 轴于 F，求 $AE\cdot AF=?$



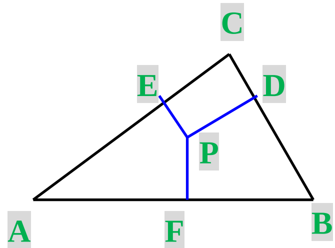
[例 16]、如图已知 ΔABC 的三个边长为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，其三个内角平分线长分别为 $AD=t_a$，$BE=t_b$，$CF=t_c$，求证：$t_at_bt_c<abc$



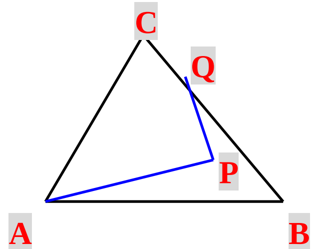
[例 17]、如图所示，P 是 ΔABC 的一个内点．延长 AP,BP,CP 分别与对边相交于 D,E,F，设 $AP=a$，$BP=b$，$CP=c$，而 $PD=PE=PF=d$．已知 $a+b+c=43$，$d=3$，求 $abc=?$



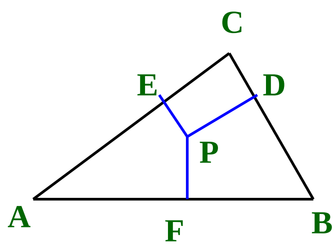
[例 18]、已知 ΔABC 的三个边长分别为 $BC=3$，$CA=4$，$AB=5$，P 为 ΔABC 的一个内点，设 P 到这三边的距离 $PD=x$，$PE=y$，$PF=z$，求这三数乘积 xyz 的最大值．



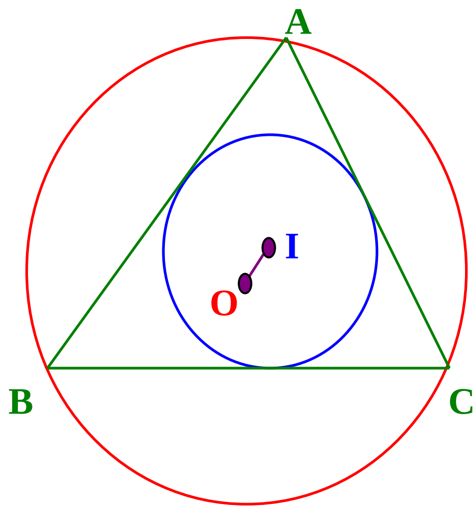
[例 19]、已知 P 是 ΔABC 的一个内点，在 ΔABC 的周界上求找一点 Q，使得折线 APQ 平分 ΔABC 的面积．如何找到 Q 点．



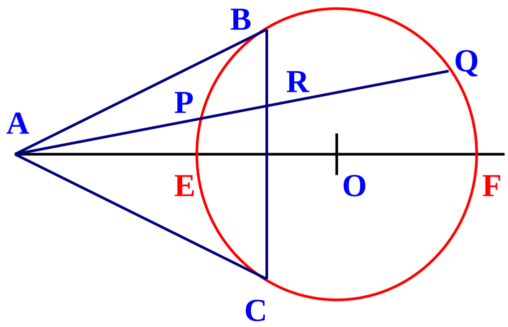
[例 20]、如图已知 P 是 ΔABC 的一个内点，D,E,F 分别是 P 到 BC,CA,AB 所引垂线的垂足，若 P 点使 $S=\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ 为最小值，求这个最小值．



[例 21]、设 O,I 分别为 ΔABC 的外心与内心，R,r 分别是 ΔABC 外接圆与内切圆的半径，外心与内心之距记为 $OI=d$，求证：$d^2=R^2-2Rr$

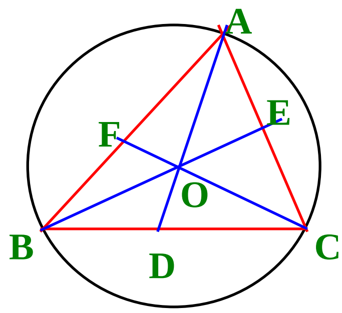


[例 22]、如图所示，从圆 O 外的一点 A，引两条圆 O 的切线 AB、AC，其中，A,B 为切点，连结 BC．从 A 引圆 O 的任意一条割线交圆 O 于 P,Q，交 BC 于 R.求证：$\frac{2}{AR}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}$



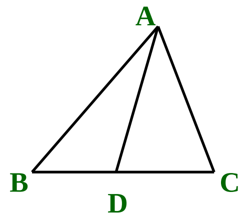
[例 23]、如图所示，设 O 为 ΔABC 的外心，外接圆半径为 R．若 AO,BO,CO 的延长线分别交 BC,CA,AB 于点 D,E,F．

求证：$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$



23 个具有深度的几何类专题解析

[例 1]、如图已知 ΔABC 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，D 是 BC 边上的中点，中线 $AD=m_a$，求 $m_a=m_a(a,b,c)$ 的解析式.



解析：(1)本几何题作辅助线的方法：

“三角形中有中线，延长中线等中线.”

将 AD 延长至 E，使 $DE=AD$．连结 BE,CE．如图 1-2

(2)依据平行四边形判定法则：

“三对一组平分线”

三对：两组对边分别平行；

两组对边分别相等；

两组对角分别相等.

一组：一组对边平行且相等.

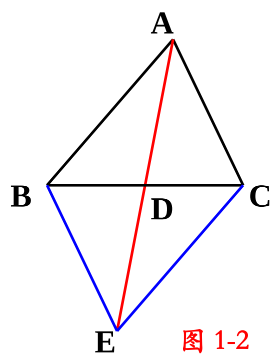


图 1-2

平分线：对角线互相平分.

满足上述条件之一的四边形为平行四边形.

本题，$BD=DC$（D 是 BC 的中点），$DE=AD$，满足对角线互相平分，所以，四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

故：$AB=CE$，$AC=BE$，$\angle BAC+\angle ACE=180^o$

则：$\cos\angle BAC+\cos\angle ACE=0$

(3)对 ΔABC，由余弦定理得：

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC \qquad ①$$

对 ΔACE，由余弦定理得：

$$AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cdot\cos\angle ACE$$

$$=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle ACE \qquad ②$$

由①+②得：

$$BC^2+AE^2=2AB^2+2AC^2-2AB\cdot AC(\cos\angle BAC+\cos\angle ACE)=2AB^2+2AC^2$$

即：$a^2+(2m_a)^2=2b^2+2c^2$ ③

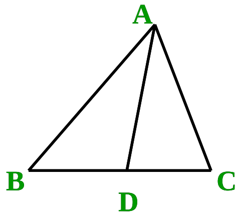
③式表明：平行四边形两条对角线的平方和等于其四条边的平方和.

由③得：$m_a^2=\dfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$

即：$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$．这就是三角形的中线长定理.

本题使用余弦定理即可解题，属中学数学范畴.

[例 2]、如图已知 ΔABC 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AD=t_a$，求 $t_a=t_a(a,b,c)$ 的解析式.

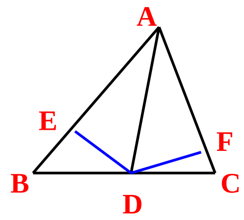


解析：(1)几何题作辅助线确定 $\dfrac{BD}{DC}$，方法：

“图中有角平分线，垂线、对称、平行线”

A> 垂线

过 D 点分别作 AB、AC 的垂线，垂足为 E,F .则：$DE=DF$



于是：$\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DE}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DF}=\dfrac{AB}{AC}$　①

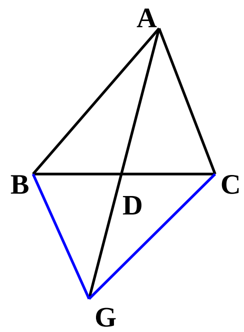
又：$\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AD\cdot\sin\angle ADB}{\frac{1}{2}\cdot DC\cdot AD\cdot\sin\angle ADC}=\dfrac{BD}{DC}$　②

由①②得：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$　③

③式就是三角形的角平分线定理.

B> 平行线

过 B 点作 $BG//AC$，交 AD 得延长线于 G . 则：$\Delta BGD \backsim \Delta ADC$



于是：$\angle BCD=\angle CAD=\angle BAD$，则：$BG=AB$，

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BG}{AC}=\dfrac{AB}{AC}$　同样得到③式

(2)在 ΔABD 中，由余弦定理得：

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$

即：

$AB^2\cdot DC=AD^2\cdot DC+BD^2\cdot DC-2AD\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle ADB$　④

在 ΔACD 中，由余弦定理得：$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$

即：$AC^2\cdot BD=AD^2\cdot BD+DC^2\cdot BD-2AD\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$　⑤

由④+⑤及 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$ 得：

$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD=AD^2\cdot DC+BD^2\cdot DC+AD^2\cdot BD+DC^2\cdot BD$

$=AD^2\cdot BC+BD\cdot DC\cdot BC$

该式称为斯特瓦尔特定理.

故：$AD^2=AB^2\cdot\dfrac{DC}{BC}+AC^2\cdot\dfrac{BD}{BC}-BD\cdot DC$　⑥

由③式得：$\dfrac{BD}{DC+BD}=\dfrac{AB}{AC+AB}$，即：$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AB}{AC+AB}$

及：$\dfrac{BD+DC}{DC}=\dfrac{AB+AC}{AC}$，即：$\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{AB+AC}$

代入⑥式后化简得：

$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$　⑦

⑦式是角平分线定理的一个推论，或者说是角平分线定理另一种形式.叫做斯库顿定理.

于是：

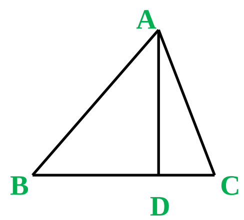
$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC=AB\cdot AC-\frac{AB\cdot BC}{AB+AC}\cdot\frac{AC\cdot BC}{AB+AC}$$

$$=AB\cdot AC\left[1-\left(\frac{BC}{AB+AC}\right)^2\right]=bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]$$

故：$t_a=\sqrt{bc\left[1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right]}$

这就是角平分线长的公式.　本题解法属中学内容.

[例 3]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$, $AB=c$, AD是BC的高，$AD=h_a$，求$h_a=h_a(a,b,c)$的解析式.



解析：(1)已知三边的面积由海伦公式得出. 首先推导海伦公式.

由余弦定理得：$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$

平方后得：$4a^2b^2\cos^2C=(a^2+b^2-c^2)^2$，即：$4a^2b^2(1-\sin^2C)=(a^2+b^2-c^2)^2$

则：$4a^2b^2\sin^2C=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$$=[2ab-(a^2+b^2-c^2)][2ab+(a^2+b^2-c^2)]$$

$$=[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]$$

$$=[c+a-b][c-a+b][a+b+c][a+b-c]$$

于是：$\dfrac{1}{4}a^2b^2\sin^2C=[\dfrac{c+a-b}{2}][\dfrac{c-a+b}{2}][\dfrac{a+b+c}{2}][\dfrac{a+b-c}{2}]$

$$=[\frac{c+a+b}{2}-b][\frac{c+b+a}{2}-a][\frac{a+b+c}{2}][\frac{a+b+c}{2}-c]$$

$$=(p-b)(p-a)p(p-c)$$

上式中，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，为三角形的半周长.

上式开平方并代入$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$得:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ①$$

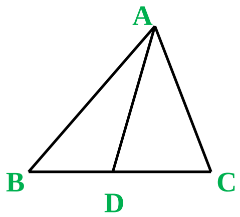
这就是计算三角形面积的海伦公式.

(2)由三角形面积$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a$得: $h_a=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}$

将①式代入得: $h_a=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

本题由海伦公式得到答案，海伦公式由余弦定理推出.

[例 4]、如图已知ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$, $AB=c$, D是BC边上的点，$AD=y$，$BD=x$，求$y=y(x)$的解析式.



解析：对ΔABD应用余弦定理得:

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$$

两边同乘以DC得:

$$AB^2\cdot DC=AD^2\cdot DC+BD^2\cdot DC-2AD\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle ADB \quad ①$$

对ΔACD应用余弦定理得: $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$

两边同乘以BD得:

$$AC^2\cdot BD=AD^2\cdot BD+DC^2\cdot BD-2AD\cdot DC\cdot BD\cdot\cos\angle ADC \quad ②$$

由于$\angle ADB+\angle ADC=180^o$，所以$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$

由①+②得:

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD$$

$$=AD^2\cdot DC+BD^2\cdot DC-2AD\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle ADB$$

$$+AD^2\cdot BD+DC^2\cdot BD-2AD\cdot DC\cdot BD\cdot\cos\angle ADC$$

$$=AD^2(DC+BD)+BD^2\cdot DC+DC^2\cdot BD$$

$$=AD^2(DC+BD)+BD\cdot DC(BD+DC)$$

$=AD^2\cdot BC+BD\cdot DC\cdot BC$

该式称为斯特瓦尔特定理. 所以:

$$AD^2=AB^2\cdot\frac{DC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BD}{BC}-BD\cdot DC$$

$$=AB^2\cdot\frac{BC-BD}{BC}+AC^2\cdot\frac{BD}{BC}-BD\cdot(BC-BD)$$

$$=AB^2-AB^2\cdot\frac{BD}{BC}+AC^2\cdot\frac{BD}{BC}-BC^2\cdot\frac{BD}{BC}+BC^2\cdot\frac{BD^2}{BC^2}$$

$$=AB^2-(AB^2+BC^2-AC^2)\cdot\frac{BD}{BC}+BC^2\cdot\frac{BD^2}{BC^2}$$

故: $y^2=c^2-(c^2+a^2-b^2)\cdot\frac{x}{a}+a^2\cdot\frac{x^2}{a^2}$

$$y=\sqrt{c^2-(c^2+a^2-b^2)\cdot\frac{x}{a}+a^2\cdot\frac{x^2}{a^2}}$$

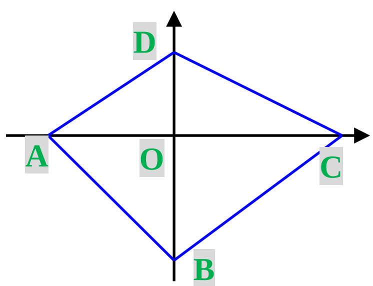
当 $x=0$ 时, $y=c$, 就是 AB 边长;

当 $x=\frac{1}{2}a$ 时, $y=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, 就是中线长;

当 $x=a$ 时, $y=b$, 就是 AC 边长.

本题是上面 3 题的一个普遍解.

[例 5]、如图已知, 在直角坐标系 xOy 中, A,B,C,D 点的坐标分别为: $A(-a,0)$, $B(0,-b)$, $C(c,0)$, $D(0,d)$.



求证: $(a+c)(b+d)\le\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+c^2)}$

证明: (1)首先对 A,B,C,D 四点共圆的情况

过 A 点作直线 AE 交纵轴于 E (如图 5-1), 使得 $\angle BAE=\angle CAD$.

此时因 $\angle ABE=\angle ACD$ (同弧上的圆周角)

所以 $\Delta ABE\backsim\Delta ACD$

则: $\frac{BE}{CD}=\frac{AB}{AC}$ (对应边成比例)

即：$BE \cdot AC = AB \cdot CD$　　①

且：$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$　（对应边成比例）

即：$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$，而：$\angle BAE=\angle CAD$

故：$\Delta AED \backsim \Delta ABC$　（两边夹一角）

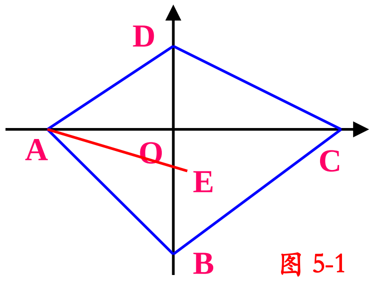


图 5-1

相似三角形判定五法则：

“相似图形要判定，边成比例角相等”

“直线平行于一边，构成相似三角形”

“两角对应各相等，三组对边比相同”

“两组对边比不足，还要夹角也相等”

上面最后一行就是“两边夹一角”

那么，$\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{AD}$，即：$ED \cdot AC = BC \cdot AD$　　②

由①+②得：

$AC \cdot (BE+ED) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$　　③

对于 A,B,C,D 四点共圆，有 $BE+ED=BD$

则③式为：$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

这就是托勒密定理的一个特例.

(2)对于一般情况，有 $BE+ED \geq BD$

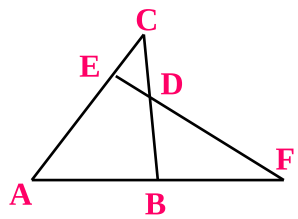
则：$AC \cdot BD \leq AC \cdot (BE+ED) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$　　④

对于本题，$AC=a+c$，$BD=b+d$，$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$CD=\sqrt{c^2+d^2}$，

$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，$AD=\sqrt{a^2+d^2}$，代入④式，本题得证.

本题就是广义托勒密定理的一个特例.

[例 6]、如图已知 ΔABC 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\dfrac{AE}{EC}=3$，$\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{1}{2}$，求 $BF=?$



解析：过 B 点作 $BG//AC$ 交 EF 于 G，如图 6-1.

则：$\Delta EDC \backsim \Delta GDB$

于是：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BG}{CE}$ ①

同样，因为 $BG//AC$，则：$\Delta BFG \backsim \Delta AFE$

于是：$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AE}{BG}$ ②

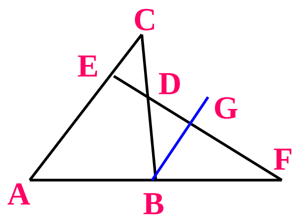


图 6-1

①②两式相乘得：

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{BG}{CE}\cdot\frac{AE}{BG}=\frac{AE}{CE}$$

即：$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AF}{BF}=1$ ③

直线与三角形的三边相交，所分割的三边比例的乘积是 1.

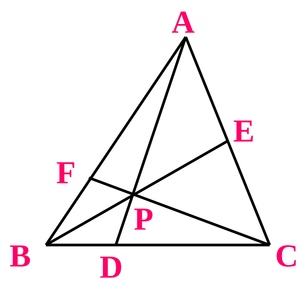
③式就是梅捏劳斯定理.

由③式得：$\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{AE}$，即：$\dfrac{BF}{AB+BF}=\dfrac{BD\cdot CE}{DC\cdot AE}$

故：$\dfrac{BF}{AB}=\dfrac{BD\cdot CE}{DC\cdot AE-BD\cdot CE}=\dfrac{1}{\dfrac{DC}{BD}\cdot\dfrac{AE}{CE}-1}$

即：$BF=\dfrac{AB}{\dfrac{DC}{BD}\cdot\dfrac{AE}{CE}-1}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}\cdot 3-1}=2c$

[例 7]、如图已知 ΔABC 的三个边长为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，P 是 ΔABC 的任意内点，连接 AP 延线交 BC 于 D，连接 BP 延线交 CA 于 E，连接 CP 延线交 AB 于 F.



求证：(1) $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$；(2) $\dfrac{AP}{AD}+\dfrac{BP}{BE}+\dfrac{CP}{CF}=2$

证明：(1)将边长比换成面积比

$$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\Delta CAF}}{S_{\Delta CFB}}=\frac{S_{\Delta PAF}}{S_{\Delta PFB}}=\frac{S_{\Delta CAF}-S_{\Delta PAF}}{S_{\Delta CFB}-S_{\Delta PFB}}=\frac{S_{\Delta CAP}}{S_{\Delta CPB}} \quad ①$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{S_{\Delta PBD}}{S_{\Delta PDC}}=\frac{S_{\Delta ABD}-S_{\Delta PBD}}{S_{\Delta ADC}-S_{\Delta PDC}}=\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta APC}} \quad ②$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta BEA}}=\frac{S_{\Delta PCE}}{S_{\Delta PEA}}=\frac{S_{\Delta BCE}-S_{\Delta PCE}}{S_{\Delta BEA}-S_{\Delta PEA}}=\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta BPA}} \quad ③$$

将①②③三式相乘得:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\Delta CAP}}{S_{\Delta CPB}}\cdot\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta APC}}\cdot\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta BPA}}=1$$

该式就是赛瓦定理.

(2)同样将边长比换成面积比

$$\frac{AP}{AD}=\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABD}}=\frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{BP}{BD}=\frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABE}}=\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta BCE}+S_{\Delta ABE}}=\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{CP}{CF}=\frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta BCF}}=\frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCF}+S_{\Delta ACF}}=\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}$$

上面三式相加得:

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BP}{BE}+\frac{CP}{CF}$$

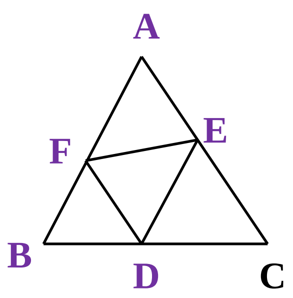
$$=\frac{S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}+S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta ABP}+S_{\Delta BCP}+S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=2$$

证毕. 采用面积的方法是几何中最常用的方法之一.

[例 8]、如图已知锐角 ΔABC 的三个边长为 $BC=a$， $CA=b$， $AB=c$， D,E,F 分别是 BC,CA,AB 边上的点，求： $S=DE+EF+FD$ 的最小值.



解析: (1)首先以 AB,AC 为对称轴做对称图形如下:

B',H 分别是 B,D 关于 AC 的对称点;

C',G 分别是 C,D 关于 AB 的对称点.

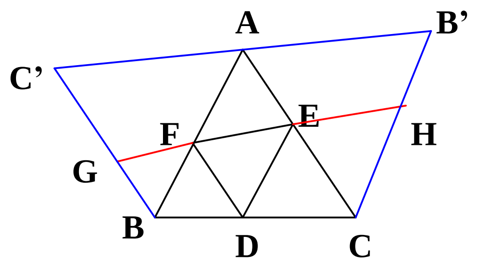
则：$GF=FD$，$EH=EC$　　①

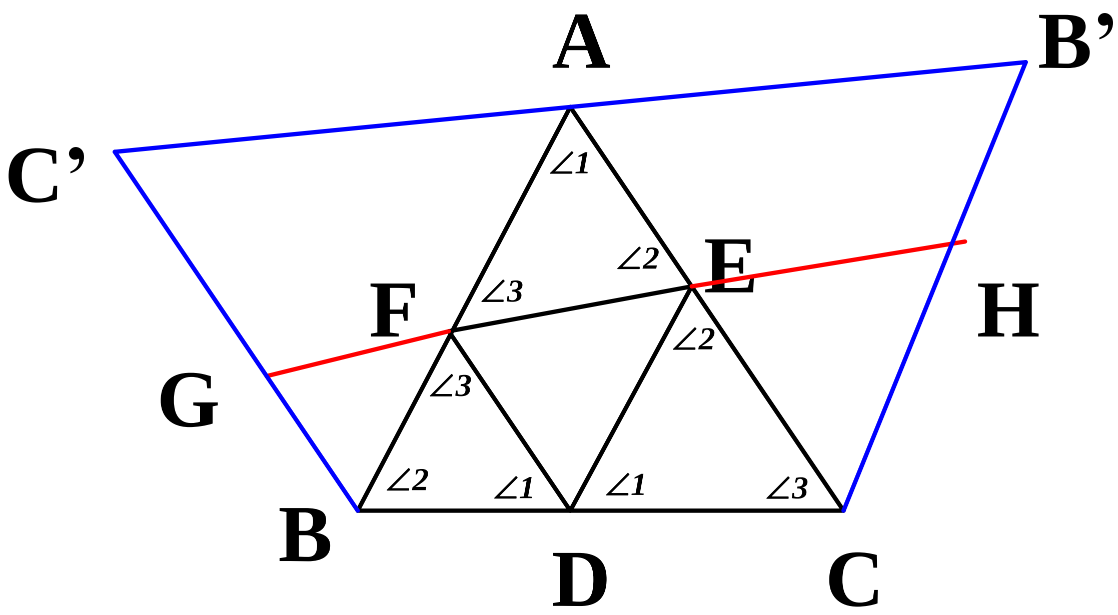
$\angle BFD=\angle GFB=\angle AFE=\angle 3$

$\angle DEC=\angle CEH=\angle FEA=\angle 2$

同理：$\angle BDF=\angle EDC=\angle 1$

当 G,F,E,H 四点共线时，S 值最小.





(2)在 ΔAFE 中，三角形的内角和：

$\angle 2+\angle 3+A=180^o$　　②

在 ΔBDF 中：$\angle 1+\angle 3+B=180^o$　　③

在 ΔCED 中：$\angle 1+\angle 2+C=180^o$　　④

以及 ΔDEF 的内角和 $\sum\angle\Delta DEF=180^o$；

于是：$\angle BDC=2\angle 1+\angle FDE=180^o$，

$\angle CEA=2\angle 2+\angle DEF=180^o$，$\angle AFB=2\angle 3+\angle EFD=180^o$

将上面三式相加得：$2\angle 1+2\angle 2+2\angle 3+\angle\Delta DEF=3\times 180^o$

故：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^o$ ⑤

由②⑤得：$\angle 1=A$；由③⑤得：$\angle 2=B$；由④⑤得：$\angle 3=C$

所以：$\Delta AFE\backsim\Delta BDF\backsim\Delta CED\backsim\Delta ABC$

(3)设 $BD=x$，$CE=y$，$AF=z$. 则由相似三角形对应边成比例得：

由 $\Delta BDF\backsim\Delta ABC$ 得：$\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$ （$\angle 1=A$ 对应边之比等于 $\angle 3=C$ 对应边之比)

即：$\dfrac{c-z}{a}=\dfrac{x}{c}$，即：$ax+cz=c^2$

同理得：$\dfrac{a-x}{b}=\dfrac{y}{a}$，即：$by+ax=a^2$

同理得：$\dfrac{b-y}{c}=\dfrac{z}{b}$，即：$cz+by=b^2$

将上面三式代入余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得：

$by+ax=cz+by+ax+cz-2bc\cos A$，即：$z=b\cos A$ ⑥

将上面三式代入余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得：$x=c\cos B$ ⑦

将上面三式代入余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得：$y=a\cos C$ ⑧

由⑥⑦⑧三式结合图形知：D,E,F 是 ΔABC 三条高线的垂足.

(4)现在来求 $S=DE+EF+FD$ 的最小值

前面已经求出 G,F,E,H 四点共线时的各个角度.

现在，连接 AD、AG、AH，由对称性知：$AG=AD$，$AH=AD$，

故：$AG=AH=h$ （设 $AD=h$）

且因为 $AD\perp BC$，所以 $AG\perp BC'$，$AH\perp B'C$

因此 $\Delta AGB\cong\Delta AHB'$，则 $\angle GAH=2A$

则在 ΔAGH 中，由余弦定理得：

$GH^2=AH^2+AG^2-2AH\cdot AG\cdot\cos(2A)=2h^2-2h^2\cos(2A)$

即：$GH^2=2h^2(1-\cos 2A)=2h^2\cdot 2\sin^2 A=(2h\sin A)^2$

故：$GH=2h\sin A$，即 $S=DE+EF+FD$ 的最小值是 $2h\sin A$

由三角形的面积公式：

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 和 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah$ 得：$\sin A=\frac{2S_{\Delta ABC}}{bc}$，$h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}$

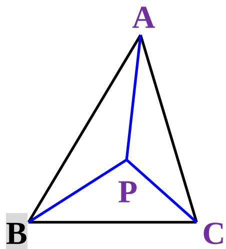
以及海伦公式 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（$p=\frac{a+b+c}{2}$）

代入可得 $S=DE+EF+FD$ 的最小值 GH：

$$GH=2h\sin A=2\cdot\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}\cdot\frac{2S_{\Delta ABC}}{bc}=\frac{8S_{\Delta ABC}^2}{abc}$$

本题思路是沿对称线展开使 ΔDEF 的三边处于同一条直线上，达到周长最短.

[例 9]、如图已知锐角 ΔABC 的三个边长为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，P 是 ΔABC 的内点，求 P 点到 ΔABC 三个顶点的距离之和 $L=PA+PB+PC$ 的最小值.



解析：(1)几何变换有旋转

将 ΔABP 绕 A 点顺时针旋转 60^o

得到的图象如图 9-1.

则：B 转到 D，P 转到 E，AP 转到 AE，BP 转到 ED.

则：$PB=DE$

那么，ΔAPE 是正三角形，ΔABD 是正三角形.

连结 DC，则 $PA=EP=AE$，$AB=AD=BD$

于是：$L=PA+PB+PC=EP+DE+PC\geq DC$ ①

当 E,P 两点都在直线 DC 上时，$L=DC$ 达到最小值.

此时的 P 点称为费马点.

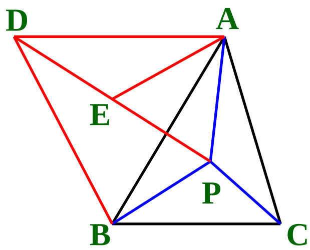


图 9-1

(2)当 D,E,P,C 四点共线时：

$$\angle APC=180^o-\angle APE=180^o-60^o=120^o$$

$$\angle APB=\angle AED=180^o-\angle AEP=180^o-60^o=120^o$$

$\angle BPC=360^o-\angle APC-\angle APB=120^o$

即，当 PA,PB,PC 互成 120^o 时，D,E,P,C 四点共线，此时 $L=PA+PB+PC$ 达到最小值. 费马点 P 与三个顶点的连线平分 P 点的角度.

(3)在 ΔABC 中，由余弦定理得:

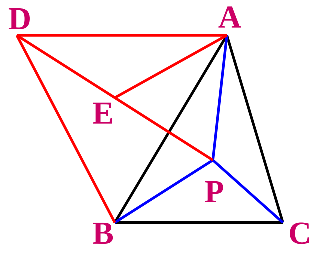


图 9-1

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$

即：$c^2+b^2=a^2+2bc\cos A$ ②

$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$ ③

由 ΔABC 的面积公式得：$\sin A=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{bc}$ ④

其中 $S_{\Delta ABC}$ 是 ΔABC 的面积，由海伦公式可求.

在 ΔADC 中，由余弦定理得:

$DC^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC$

$=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\angle DAB+\angle BAC)$

$=c^2+b^2-2bc\cos(60^o+A)$

将②式代入上式得:

$DC^2=a^2+2bc\cos A-2bc\cos(60^o+A)$

$=a^2+2bc[\cos A-\cos(60^o+A)]$

$=a^2+2bc[2\sin 30^o\sin(30^o+A)]$

$=a^2+2bc(\sin 30^o\cos A+\cos 30^o\sin A)$

$=a^2+bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A$

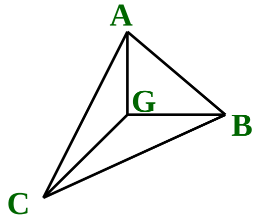
故：$DC=\sqrt{a^2+bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A}$ ⑤

将③和④两式代入⑤式，得到结果.

本题采用旋转方法使所求的线段处于一条直线上，即四点共线法求最小值.

[例 10]、如图已知，G 为 ΔABC 的重心，$GA=3$，$GB=4$，

$GC=5$，求 ΔABC 的面积.



解析：延长 CG 到 $CD=2CG$，连结 AD、BD，则 G 为 CD 中点.

因为 $GA=3$，$GB=4$，$GC=5$，满足勾股定理，所以 ΔAGB 为直角三角形，$AGBD$ 为矩形.

故：$S_{\Delta ACG}=S_{\Delta AGD}=\frac{1}{2}S_{AGBD}$

$S_{\Delta CGB}=S_{\Delta BDG}=\frac{1}{2}S_{AGBD}$

$S_{\Delta AGB}=\frac{1}{2}S_{AGBD}$

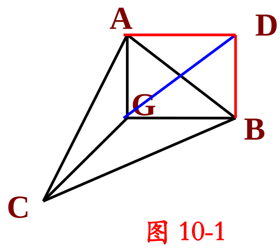


图 10-1

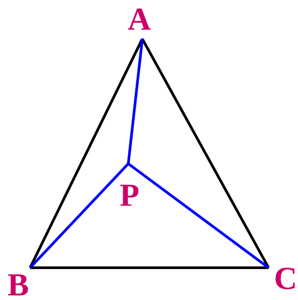
这三者之和就是 ΔABC 的面积.

故：$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACG}+S_{\Delta CGB}+S_{\Delta AGB}=\frac{3}{2}S_{AGBD}=\frac{3}{2}\times 3\times 4=18$

本题利用“勾三股四”构成直角三角形，以及中线平分三角形面积来计算出答案.

另：根据重心的性质，重心与三角形顶点的连线平分三角形的面积.由此可知：

$S_{\Delta ACG}=S_{\Delta CGB}=S_{\Delta AGB}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$，进而得到答案.



[例 11]、如图已知，P 是等边 ΔABC 的一个内点，满足 $PA=3$，

$PB=4$，$PC=5$，求 ΔABC 的周长.

解析：(1)设 P 关于 AB,BC,CA 的对称点为 E,F,G

如图 11-1,连结 EF,FG,GE，连结 $AE,EB,BF,FC,CG,GA,$ 由于对称性可知：

$EA=PA=GA$，$EB=PB=FB$，$FC=PC=GC$

同样由于对称性：

$\angle EAG=2\angle A$，$\angle FBE=2\angle B$，$\angle GCF=2\angle C$，

$\angle AEB=\angle APB$，$\angle BFC=\angle BPC$，$\angle CGA=\angle CPA$

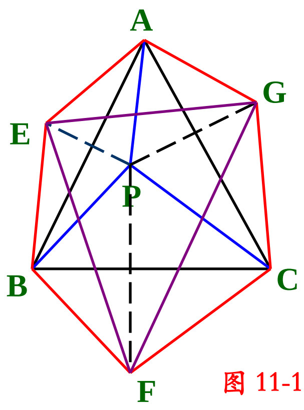


图 11-1

(2)在 ΔAEG 中，由余弦定理得：

$$EG^2 = EA^2 + GA^2 - 2EA \cdot GA \cdot \cos\angle EAG$$

$$= 2PA^2 - 2PA^2\cos(2A)$$

$$= 2PA^2[1-\cos(2A)]$$

$$= 2PA^2 \cdot 2\sin^2 A$$

故：$EG = 2PA\sin A$　①

同样，在 ΔBFE 中，由余弦定理得：　$FE = 2PB\sin B$　②

同样，在 ΔCGF 中，由余弦定理得：　$GF = 2PC\sin C$　③

(3)由于 ΔABC 是等边三角形，所以有：$A = B = C = 60^o$

于是由①②③式得：

$$EG : FE : GF = PA : PB : PC = 3:4:5 \quad ④$$

所以 ΔEFG 是直角三角形.即：$\angle GEF = 90^o$

(4)在 ΔAEG 中，求各角的角度

$$\angle AEG = \frac{1}{2}(180^o - \angle EAG) = \frac{1}{2}(180^o - 2\angle A) = 90^o - \angle A = 90^o - 60^o = 30^o$$

在 ΔBFE 中，

$$\angle BEF = \frac{1}{2}(180^o - \angle FBE) = \frac{1}{2}(180^o - 2\angle B) = 90^o - \angle B = 90^o - 60^o = 30^o$$

所以：$\angle APB = \angle AEB = \angle AEG + \angle GEF + \angle BEF = 30^o + 90^o + 30^o = 150^o$

故：$\angle APB = 150^o$

(5)在 ΔAPB 中，由余弦定理得：

$$AB^2 = EA^2 + EB^2 - 2EA \cdot EB \cdot \cos\angle AEB$$

$$= PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cdot \cos\angle APB$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^o$$

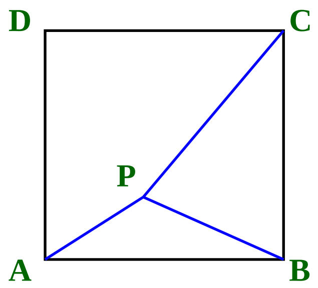
$= 25 - 24 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 25 + 12\sqrt{3}$

故：$AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

所以，ΔABC 的周长为：$AB + BC + CA = 3AB = 3\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

本题找 P 点对三边的对称点，由此构成的三角形.

[例 12]、如图已知正方形 $ABCD$ 内有一点 P，若 $PA = a$，$PB = 2a$，$PC = 3a$，求正方形 $ABCD$ 的周长.



解析：“正三角形正方形，几何变换有旋转”

对于具有等边共点性质得图形，如正三角形正方形，作辅助线的方法是“几何变换”.

几何变换包括：“平移”、“对称”、“旋转”、“相似”、“位似”.

将 ΔAPB 绕 B 点顺时针旋转 90^o 后，得到图形图 12-1.

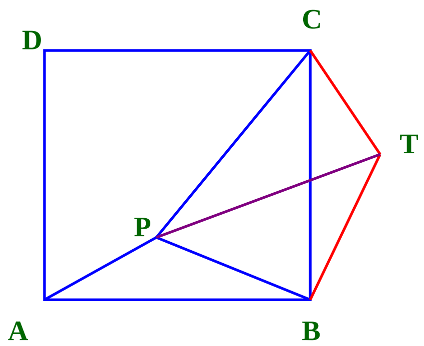


图 12-1

其中 A 点转到 C 点，P 点转到 T 点.

故：$\Delta APB \cong \Delta CTB$

则：$TC = PA = a$，$TB = PB = 2a$，$\angle PBT = 90^o$

于是,ΔPBT 是一个等腰直角三角形，$PT = \sqrt{2}PB = 2\sqrt{2}a$，$\angle PTB = 45^o$.

在 ΔPTC 中，$PC = 3a$，$TC = a$，$PT = 2\sqrt{2}a$，则 PC,TC,PT 满足勾股定理，所以 ΔPTC 是直角三角形，$\angle PTC = 90^o$，于是 $\angle BTC = 90^o + 45^o = 135^o$.

在 ΔBTC 中，由余弦定理得：

$BC^2 = TC^2 + TB^2 - 2TC \cdot TB \cdot \cos\angle BTC$

$= PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cdot \cos 135^o$

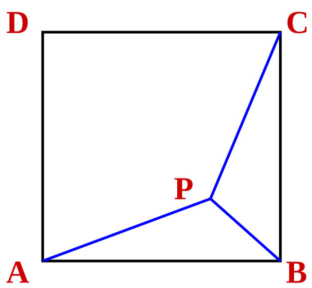
$$=a^2+4a^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})=5a^2+2\sqrt{2}a^2$$

所以，正方形 $ABCD$ 的边长为： $BC=\sqrt{5+2\sqrt{2}}a$

$$AB+BC+CD+DA=4BC=4\sqrt{5+2\sqrt{2}}a$$

本题采用了几何变换法，即旋转，利用勾股定理和余弦定理得到答案.

[例 13]、如图已知正方形 $ABCD$ 内有一点 P ，若 P 到 A,B,C 三点的距离之和 L 有最小值，当最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 时，求此正方形 $ABCD$ 的周长.



解析：连接 AC ，则 P 点就是 ΔABC 内的费马点.

依据上面第 9 题的结论，很容易得到答案.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 x ，则 $AC=\sqrt{2}x$ ， $\angle ABC=90^o$

利用第 9 题的结论，

$$L=PA+PB+PC$$

$$=\sqrt{AC^2+AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC+\sqrt{3}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}$$

$$=\sqrt{2x^2+\sqrt{3}x^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}x}=\sqrt{2+\sqrt{3}}x$$

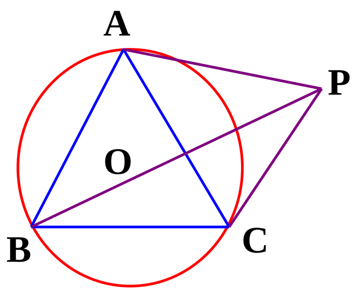
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)x=\frac{x}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

当最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 时，即： $\frac{x}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

故： $x=2$ ，因此，正方形 $ABCD$ 的周长为 8 .

本题直接应用第 9 题的结论，不再赘述.

[例 14]、设等边 ΔABC 的外接圆圆心为 O ，圆半径为 R ， P 是圆外一点， $OP=D>R$ ，求由线段 PA ， PB ， PC 所构成的三角形的面积 $S=?$



解析：(1)由 PA ， PB ， PC 所构成的三角形

将ΔAPC绕A点顺时针旋转60^o，则C转到B，P转到E，结果如图 14-1.

于是ΔAEP为等边三角形，则$PE = PA$，$BE = PC$，ΔBEP就是由线段PA，PB，PC所构成的三角形.

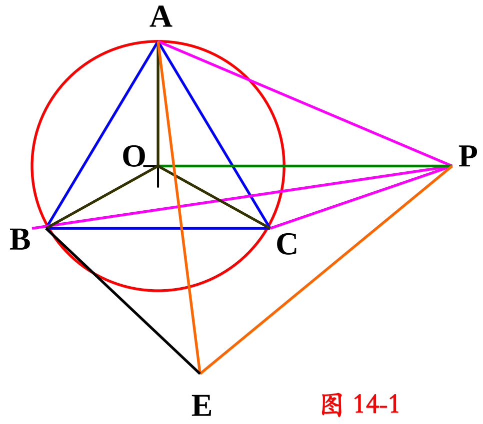


图 14-1

(2) 设 $\angle POC = \theta$，则 $\angle POA = 120^o - \theta$，

$\angle POB = 120^o + \theta$，$OP = D$，

$OA = OB = OC = R$

由余弦定理得：

$$PA^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cdot \cos\angle POA = R^2 + D^2 - 2RD\cos(120^o - \theta) \quad ①$$

$$PB^2 = OB^2 + OP^2 - 2OB \cdot OP \cdot \cos\angle POB = R^2 + D^2 - 2RD\cos(120^o + \theta) \quad ②$$

$$PC^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC \cdot OP \cdot \cos\angle POC = R^2 + D^2 - 2RD\cos\theta \quad ③$$

(3)在ΔBEP中，由余弦定理得：

$$2PB \cdot PE \cdot \cos\angle BPE = PB^2 + PE^2 - BE^2,$$

即：$2PB \cdot PA \cdot \cos\angle BPE = PB^2 + PA^2 - PC^2$

即：$$(\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA \cdot \cos\angle BPE)^2 = \frac{1}{4^2}(PB^2 + PA^2 - PC^2)^2 \quad ④$$

由于$$(\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2 \cdot \cos^2\angle BPE = (\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2(1 - \sin^2\angle BPE)$$

$$= (\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2 - (\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA \cdot \sin\angle BPE)^2 = (\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2 - (S_{\Delta BEP})^2$$

代入④式得：$$(\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2 - (S_{\Delta BEP})^2 = \frac{1}{4^2}(PB^2 + PA^2 - PC^2)^2$$

即：$$(S_{\Delta BEP})^2 = (\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PA)^2 - \frac{1}{4^2}(PB^2 + PA^2 - PC^2)^2$$

则：$$(S_{\Delta BEP})^2 = \frac{1}{4^2}\left[4PB^2 \cdot PA^2 - (PB^2 + PA^2 - PC^2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4^2}\left[4PB^2 \cdot PA^2 - (PB^2 + PA^2)^2 - PC^4 + 2PC^2 \cdot (PB^2 + PA^2)\right]$$

$$= \frac{1}{4^2}\left[2PC^2 \cdot (PB^2 + PA^2) - PC^4 - (PB^2 - PA^2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4^2}\left[PC^2 \cdot (2PB^2 + 2PA^2 - PC^2) - (PB^2 - PA^2)^2\right] \quad ⑤$$

由①②③得：

$$2PB^2+2PA^2-PC^2=3(R^2+D^2)-2RD\left[2\cos(120^o+\theta)+2\cos(120^o-\theta)-\cos\theta\right]$$

$$=3(R^2+D^2)-2RD\left[4\cos120^o\cos\theta-\cos\theta\right]$$

$$=3(R^2+D^2)-2RD(-2\cos\theta-\cos\theta)$$

$$=3(R^2+D^2)+6RD\cos\theta$$

$$PC^2\cdot(2PB^2+2PA^2-PC^2)=(R^2+D^2-2RD\cos\theta)\cdot[3(R^2+D^2)+6RD\cos\theta]$$

$$=3(R^2+D^2-2RD\cos\theta)\cdot(R^2+D^2+2RD\cos\theta)$$

$$=3[(R^2+D^2)^2-4R^2D^2\cos^2\theta)] \quad ⑥$$

同样由①②③得：

$$(PB^2-PA^2)^2=\{[R^2+D^2-2RD\cos(120^o+\theta)]-[R^2+D^2-2RD\cos(120^o-\theta)]\}^2$$

$$=4R^2D^2[\cos(120^o+\theta)-\cos(120^o-\theta)]^2=4R^2D^2[-2\sin120^o\sin\theta]^2$$

$$=12R^2D^2\sin^2\theta \quad ⑦$$

(4)将⑥⑦代入⑤得：

$$(S_{\Delta BEP})^2=\frac{1}{4^2}\left[PC^2\cdot(2PB^2+2PA^2-PC^2)-(PB^2-PA^2)^2\right]$$

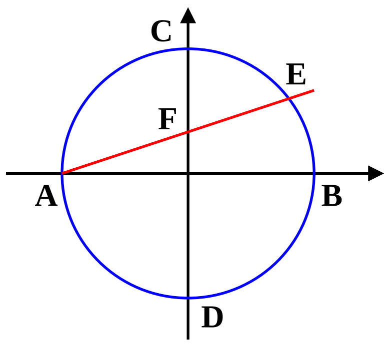
$$=\frac{1}{4^2}\{3[(R^2+D^2)^2-4R^2D^2\cos^2\theta]-12R^2D^2\sin^2\theta\}$$

$$=\frac{1}{4^2}[3(R^2+D^2)^2-12R^2D^2]=\frac{3}{4^2}(D^2-R^2)^2$$

故： $S_{\Delta BEP}=\frac{\sqrt{3}}{4}(D^2-R^2)$． 另：本题也可以采用特值法得到答案.

本题由旋转构成三角形，由余弦定理得到答案.

[例 15]、如图已知，半径为 $R=\sqrt{2}$ 的圆 O 其圆心在原点，圆 O 与 x 轴相交于 A,B，与 y 轴相交于 CD．过 A 的任意一直线交圆 O 于 E，交 y 轴于 F，求 $AE\cdot AF=?$



解析：连结 EB，则因 $\angle AEB=90^o$，$\angle AOF=90^o$

故：$\Delta AOF \backsim \Delta AEB$

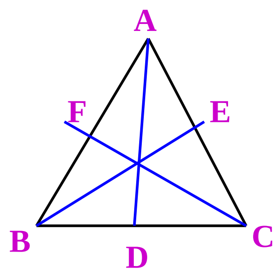
由相似三角形对应边成比例，或者由$\angle FAO$的余弦值得：$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AO}{AF}$

即：$AE\cdot AF=AB\cdot AO=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$

本题涉及到了圆．关于圆方面的定理记忆口诀是：

1.垂径定理：	垂径定理有简言，直径平分垂直弦；
2.圆心角定理：	还有圆心角定理，等角等弧对等弦．
3.圆周角定理：	圆周角也有规律，等于圆心角一半；
4.切线判定定理：	经过半径之外端，垂直半径是切线．
5.切线长定理：	两条切线长相等，点心连角平分线；
6.弦切角定理：	弦切角等圆周角，都是圆心角一半．
7.相交弦定理：	圆内一弦交一弦，割得弦长积不变；
8.切割线定理：	同点切线长平方，等于割线乘割线．

[例 16]、如图已知ΔABC的三个边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，其三个内角平分线长分别为$AD=t_a$，$BE=t_b$，$CF=t_c$，求证：$t_at_bt_c<abc$



解析：根据第 2 题的结果得：

$$t_a=\sqrt{bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]}<\sqrt{bc}$$

$$t_b=\sqrt{ca\left[1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right]}<\sqrt{ca}$$

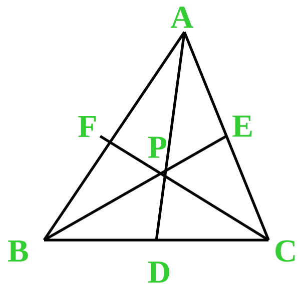
$$t_c=\sqrt{ab\left[1-\frac{a^2}{(a+b)^2}\right]}<\sqrt{ab}$$

上面三式相乘得到结果．

本题利用内角平分线公式直接秒杀．

[例 17]、如图所示，P 是 ΔABC 的一个内点. 延长 AP, BP, CP 分别与对边相交于 D, E, F，设 $AP=a$，$BP=b$，$CP=c$，而 $PD=PE=PF=d$.已知 $a+b+c=43$，$d=3$，求 $abc=?$

解析：本题由于已知数据是 P 点到顶点的距离，和相应延长到对边点的距离，就是说是 P 点位置的数据，然后所求的也是这些数据的关系，因此，要紧紧围绕这些数据来做题.



d 与 a,b,c 的关系可以由三角形的面积比得到：

$$\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{BC\cdot PD}{BC\cdot AD}=\frac{PD}{AD}=\frac{d}{d+a}$$

$$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AB\cdot PF}{AB\cdot CF}=\frac{PF}{CF}=\frac{d}{d+c}$$

$$\frac{S_{\Delta CPA}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{CA\cdot PE}{CA\cdot BE}=\frac{PE}{BE}=\frac{d}{d+b}$$

上面三式相加得：

$$\frac{d}{d+a}+\frac{d}{d+b}+\frac{d}{d+c}=\frac{S_{\Delta BPC}+S_{\Delta APB}+S_{\Delta CPA}}{S_{\Delta ABC}}=1 \quad ①$$

由①式得：

$$d(d+b)(d+c)+d(d+c)(d+a)+d(d+a)(d+b)=(d+a)(d+b)(d+c) \quad ②$$

左边展开得：

$$LHS=d[d^2+(b+c)d+bc]+d[d^2+(c+a)d+ca]+d[d^2+(a+b)d+ab]$$

$$=d[3d^2+2(a+b+c)d+(ab+bc+ca)]$$

$$=3d^3+2(a+b+c)d^2+(ab+bc+ca)d \quad ③$$

右边展开得：

$$RHS=(d+a)(d+b)(d+c)$$

$$=d^3+(a+b+c)d^2+(ab+bc+ca)d+abc \quad ④$$

将③④代入②式得：

$3d^3+2(a+b+c)d^2+(ab+bc+ca)d=d^3+(a+b+c)d^2+(ab+bc+ca)d+abc$

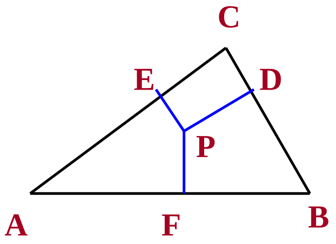
故：$abc=2d^3+(a+b+c)d^2=d^2[2d+(a+b+c)]$ ⑤

将$a+b+c=43$，$d=3$代入⑤式得：

$abc=3^2\times(2\times3+43)=3^2\times49=21^2=441$

本题采用传统的面积比方法，通过推导，得到答案.

[例 18]、已知ΔABC的三个边长分别为$BC=3$，$CA=4$，$AB=5$，P为ΔABC的一个内点，设P到这三边的距离$PD=x$，$PE=y$，$PF=z$，求这三数乘积xyz的最大值.



解析：因为ΔABC的三边长满足“勾股定理”，所以ΔABC为直角三角形.

即：$\angle ACB=90^o$.

连结PA, PB, PC，则$PD\perp BC$，$PE\perp CA$，$PF\perp AB$.(如图 18-1)

我们计算三角形的面积关系：

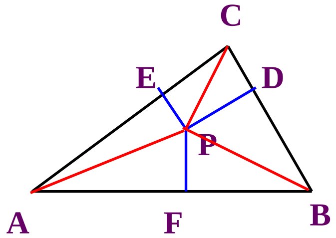


图 18-1

由$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PCA}$得：

$\frac{1}{2}BC\cdot CA=\frac{1}{2}AB\cdot PF+\frac{1}{2}BC\cdot PD+\frac{1}{2}CA\cdot PE$

即：$AB\cdot PF+BC\cdot PD+CA\cdot PE=BC\cdot CA$

即：$3x+4y+5z=12$ ①

由于$3x,4y,5z$都是正数，且其和为定值.

根据“一正二定三相等”，当$3x=4y=5z$时，其积$(3x)(4y)(5z)$达到极大值.

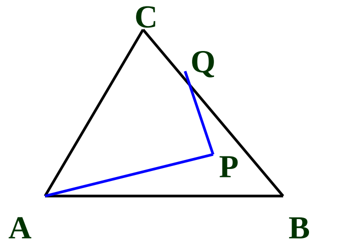
故：当$3x=4y=5z=\frac{12}{3}=4$时，

其积$(3x)(4y)(5z)=4\times4\times4$为最大值.

最大值：$(xyz)_M=\frac{4\times4\times4}{3\times4\times5}=\frac{16}{15}$

本题利用“一正二定三相等”的知识点来解题.

[例 19]、已知 P 是 ΔABC 的一个内点，在 ΔABC 的周界上求找一点 Q ，使得折线 APQ 平分 ΔABC 的面积. 如何找到 Q 点.



解析：设 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点，连结 AD,DF ，则 ΔABC 的区域分成 3 部分.

(1) P 点在 AD 上，如图 19-1.

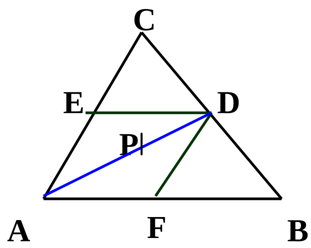


图 19-1

此时，由于 D 是 BC 中点，

则 $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$

故：$Q=D$，即 D 点就是要找的 Q 点.

(2) P 点在 ΔAFD 内，如图 19-2.

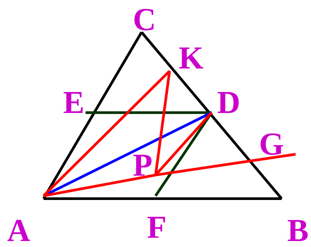


图 19-2

连结 AP ，延长线交 BC 于 G .

连结 PD,PK ，过 A 作 $AK//PD$ 交 BC 于 K

则由于 ΔAPD 与 ΔKPD 同底(PD 为底)等高($AK//PD$ 间距为高)，故 $S_{\Delta APD}=S_{\Delta KPD}$

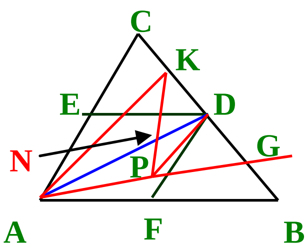


图 19-2

则：$S_{\Delta ABG}+S_{\Delta KPG}=S_{\Delta ABG}+S_{\Delta PGD}+S_{\Delta KPD}$

$=S_{\Delta ABG}+S_{\Delta PGD}+S_{\Delta APD}=S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$

故：$Q=K$，即 K 点就是要找的 Q 点.

另：本题实际上是要使 $S_{\Delta APN}=S_{\Delta KND}$，用割补法交换面积，这是思路.

(3) P 点在 ΔBFD 内，如图 19-3.

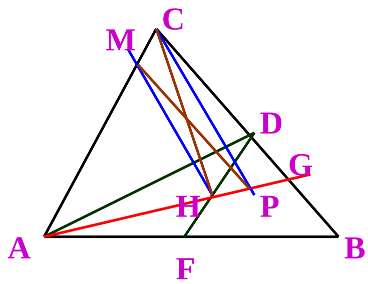


图 19-3

连结 AP ，交 DF 于 H ， AP 延长线交 BC 于 G .

连结 PC ，过 H 点作 $HM//PC$ ，交 CA 于 M .

于是 ΔPMH 与 ΔCMH 为同底(底为 MH)等高($HM//PC$ 间距为高)

则：$S_{\Delta PMH}=S_{\Delta CMH}$

所以：$S_{\Delta APM}=S_{\Delta AHM}+S_{\Delta PMH}=S_{\Delta AHM}+S_{\Delta CMH}=S_{\Delta AHC}$

由于ΔAHC与ΔABC同底(底为CA)，因DF为ΔABC的中位线而高度相差一半，故：

$S_{\Delta APM}=S_{\Delta AHC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$

故：$Q=M$，即M点就是要找的Q点.

另：这里实际上是交换$S_{\Delta PMH}$与$S_{\Delta CMH}$，还是面积割补法.

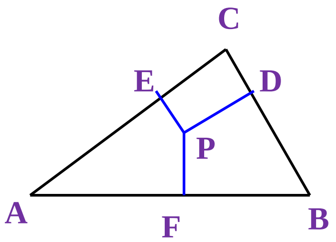
最终，当P点在AD上时，$Q=D$；

当P点在ΔAFD内时，Q点在CD上；

当P点在ΔBFD内时，Q点在CE上.

本题实际上就是计算面积，将图中的面积凑成ΔABC的一半.

[例 20]、如图已知P是ΔABC的一个内点，D,E,F分别是P到BC,CA,AB所引垂线的垂足，若P点使$S=\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小值，求这个最小值.



解析：为了方便解题，设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$；

设$PD=x$，$PE=y$，$PF=z$；设ΔABC的半周长为$p=\frac{a+b+c}{2}$；

设ΔABC的内切圆半径为r，面积为S_{Δ}，则$S_{\Delta}=pr$

则：$S_{\Delta}=S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PCA}=\frac{1}{2}(AB\cdot PF+BC\cdot PD+CA\cdot PE)=\frac{1}{2}(ax+by+cz)$

即：$(ax+by+cz)=2S_{\Delta}=2pr$　①

则：$S=\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$　②

由柯西不等式得：

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\right]\cdot\left[(\sqrt{ax})^2+(\sqrt{by})^2+(\sqrt{cz})^2\right]\geq(a+b+c)^2$$

即：$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geq(a+b+c)^2$　③

将①②式代入得：$S\cdot(2pr)\ge(2p)^2$，即：$S\ge\dfrac{2p}{r}$　④

当且仅当 $\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\dfrac{a}{x}}}=\dfrac{\sqrt{by}}{\sqrt{\dfrac{b}{y}}}=\dfrac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\dfrac{c}{z}}}$ 时，③和④式取等号.

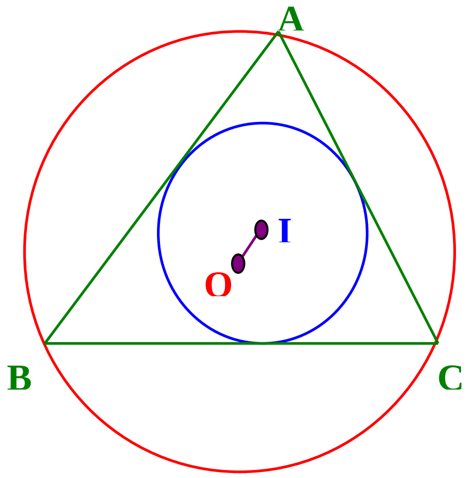
即：当且仅当 $x=y=z$ 时，$S=\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ 取最小值，

即：当且仅当 $x=y=z=r$ 时，$S_{\min}=\dfrac{2p}{r}$.

故：当 $S=\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}=\dfrac{2p}{r}$ 为最小值时，P 点为 ΔABC 的内心.

本题将柯西不等式的条件应用于几何，并求得结果.

[例 21]、设 O,I 分别为 ΔABC 的外心与内心，R,r 分别是 ΔABC 外接圆与内切圆的半径，外心与内心之距记为 $OI=d$，求证：$d^2=R^2-2Rr$



解析：(1)作连线辅助线

连结 AI 延长线交圆 O 于 P；

连结 PO 延长线交圆 O 于 S；

连结 BS、BI；连结 OI 延长线交圆 O 于 M,N.

由 I 点向 AB 作垂线，垂足为 T，如图 21-1.

(2)由相交弦定理

$AI\cdot PI=MI\cdot NI$

$=(R+d)(R-d)=R^2-d^2$　①

(即：由 $\Delta MIP\backsim\Delta\ NI$ 相似比得.)

(3)证 ΔBPI 为等腰三角形

由于 I 是内心，即 Δ 内角平分线交点，故：

$\angle BAI=\angle IA$，$\angle ABI=\angle IB$　②

在 ΔABI 中，由外角定理得：

$\angle BIP=\angle BAI+\angle A$

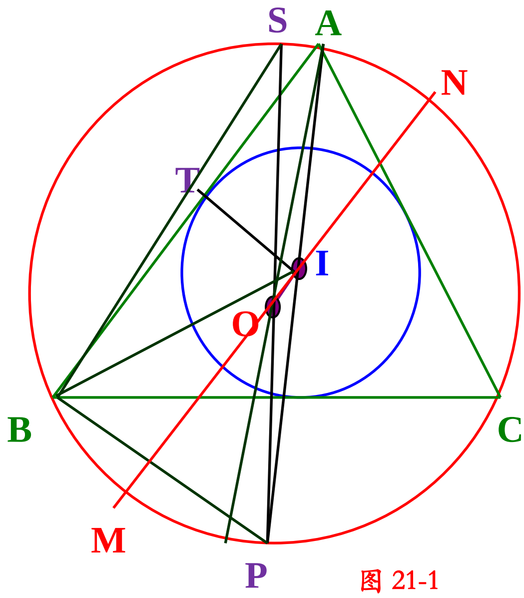


图 21-1

$=\angle IAC+\angle IBC$ (由②得)

$=\angle PAC+\angle IBC$

$=\angle PBC+\angle IBC$ (由圆周角定理)

$=\angle PBI$

即：ΔPBI 是等腰三角形，故：$BP=PI$ ③

(4) 欧拉公式

在 $Rt\Delta BSP$ 和 $Rt\Delta TAI$ 中，由圆周角定理得：$\angle BSP=\angle TAI$

即：$\Delta BSP\backsim\Delta TAI$，所以：$\dfrac{AI}{SP}=\dfrac{TI}{BP}=\dfrac{TI}{PI}$

故：$AI\cdot PI=TI\cdot SP=r\cdot 2R=2Rr$ ④

由①和④得：$R^2-d^2=2Rr$，即：$d^2=R^2-2Rr$ ⑤

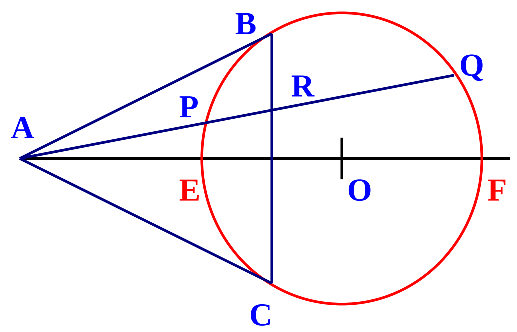
⑤式称为欧拉公式.

另：$d^2=R^2-2Rr$ 也可以写成：$d^2=(R-r)^2-r^2$，即：$d^2+r^2=(R-r)^2$

这就是欧拉公式的"勾股定理"，它将三角形的外接圆半径 R、内切圆半径 r 和两心之距 d，以"勾股定理"的形式联系了起来.

本题用到了相交弦定理、圆周角定理等关于圆的基本定理.

[例 22]、如图所示，从圆 O 外的一点 A，引两条圆 O 的切线 AB、AC，其中，A,B 为切点，连结 BC．从 A 引圆 O 的任意一条割线交圆 O 于 P,Q，交 BC 于 R.求证：$\dfrac{2}{AR}=\dfrac{1}{AP}+\dfrac{1}{AQ}$



解析：连结 OP、OB、OQ，过 O 作 AQ 的垂线，垂足为 T.

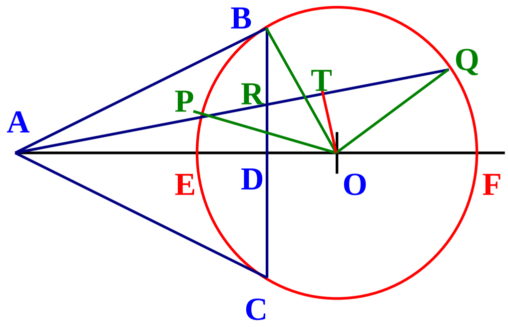
设：$AO=a$，圆 O 的半径 $OP=OB=OQ=R$

(1) 切割线定理

因为 $\Delta ABP \backsim \Delta ABQ$，故由切割线定理得:

$$AB^2 = AP \cdot AQ = AE \cdot AF = (a-R)(a+R) = a^2 - R^2$$

即: $AB = \sqrt{a^2 - R^2}$ ①



由 $Rt\Delta ABO \backsim Rt\Delta ADB$ 得:

$$AB^2 = AD \cdot AO = a \cdot AD$$

即: $AD = \dfrac{AB^2}{a} = \dfrac{a^2 - R^2}{a}$ ②

(2) 勾股定理

在 $Rt\Delta ADB$ 中，由勾股定理得:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = (a^2 - R^2) - \left(\frac{a^2 - R^2}{a}\right)^2 = (a^2 - R^2)\frac{R^2}{a^2}$$

即: $BD = \dfrac{R}{a}\sqrt{a^2 - R^2}$ ③

(3) 求 $\dfrac{1}{AR} = \dfrac{a\cos\theta}{a^2 - R^2}$

设 $\angle OAP = \theta$，则在 ΔADR 中，$\cos\theta = \dfrac{AD}{AR}$

则: $\dfrac{1}{AR} = \dfrac{\cos\theta}{AD} = \dfrac{a\cos\theta}{a^2 - R^2}$ ④

(4) 求 $\dfrac{1}{AP} = \dfrac{2a\cos\theta - AP}{a^2 - R^2}$

在 ΔAOP 中，由余弦定理得: $OP^2 = AP^2 + AO^2 - 2AP \cdot AO \cdot \cos\theta$

即: $R^2 = AP^2 + a^2 - 2a \cdot AP \cdot \cos\theta$

即: $a^2 - R^2 = 2a \cdot AP \cdot \cos\theta - AP^2 = AP(2a\cos\theta - AP)$

故: $\dfrac{1}{AP} = \dfrac{2a\cos\theta - AP}{a^2 - R^2}$ ⑤

同理在 ΔAOQ 中，由余弦定理得: $\dfrac{1}{AQ} = \dfrac{2a\cos\theta - AQ}{a^2 - R^2}$ ⑥

(5) 求得结果

由垂径定理知: $PT = QT$

则：$AP+AQ=2AT=2AO\cdot\cos\theta=2a\cos\theta$ ⑦

于是，由⑤+⑥得：

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2a\cos\theta-AP}{a^2-R^2}+\frac{2a\cos\theta-AQ}{a^2-R^2}=\frac{4a\cos\theta-(AP+AQ)}{a^2-R^2}$$

$$=\frac{4a\cos\theta-2a\cos\theta}{a^2-R^2}=\frac{2a\cos\theta}{a^2-R^2} \quad ⑧$$

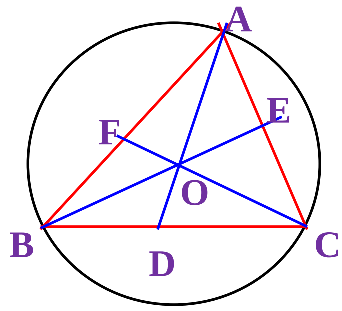
将④带入⑧得：$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2a\cos\theta}{a^2-R^2}=\frac{2}{AR}$

上式表明，AR 是 AP 与 AQ 的调和平均值. 证毕.

本题采用解析的方法证明了几何证明题.

[例 23]、如图所示，设 O 为 ΔABC 的外心，外接圆半径为 R.

若 AO,BO,CO 的延长线分别交 BC,CA,AB 于点 D,E,F.



求证：$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$

解析：欲证 $\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$

须证：$\frac{R}{AD}+\frac{R}{BE}+\frac{R}{CF}=2$，

即：$3-(\frac{R}{AD}+\frac{R}{BE}+\frac{R}{CF})=3-2=1$；

即：$(1-\frac{R}{AD})+(1-\frac{R}{BE})+(1-\frac{R}{CF})=1$；即：$(1-\frac{OA}{AD})+(1-\frac{OB}{BE})+(1-\frac{OC}{CF})=1$

即：$\frac{AD-OA}{AD}+\frac{BE-OB}{BE}+\frac{CF-OC}{CF}=1$；即：$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$.

由同底异高的三角形面积之比等于其高之比得：

$$\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot OD\cdot\sin\angle ODC}{\frac{1}{2}BC\cdot AD\cdot\sin\angle ODC}=\frac{OD}{AD}$$，同理：$\frac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{OE}{BE}$，$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{OF}{CF}$

三式相加得：$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}=1$

即：$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$. 证毕.

本题采用分析法及面积法，这是几何中最常用的方法之一.