

重庆八中高 2020 级高三（下）第 2 次月考

理科数学试题

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 设集合 $A = \{x | x^2 < 9\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0\}$

2. 设 $(1+i)(a+bi) = 2$, 其中 a, b 是实数, i 为虚数单位, 则 $|3a+bi| =$

- A. 2 B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = 2$, $a_3 = 2a_2 + 16$, 则 $\log_2 a_9 =$

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

4. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 4 \leq 0, \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最小值为

- A. -8 B. -6 C. 1 D. 3

5. 我国古代有着辉煌的数学研究成果, 其中《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》有着丰富多彩的内容, 是了解我国古代数学的重要文献. 这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 现拟从这 5 部专著中选择 2 部作为学生课外兴趣拓展参考书目, 则所选 2 部专著中至少有一部不是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为

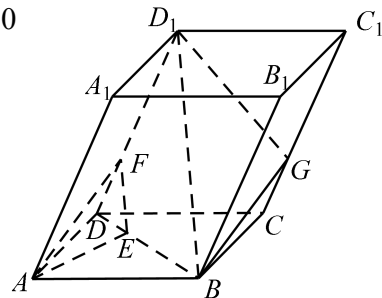
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

6. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $ABCD$ 为平行四边形,

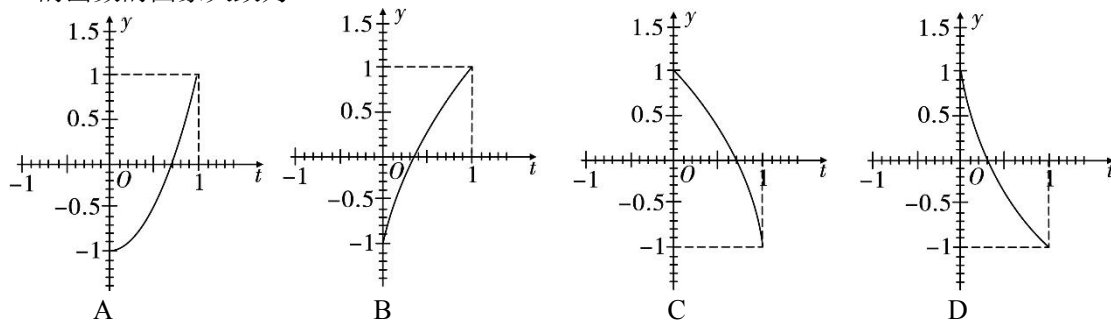
E, F 分别在线段 DB, DD_1 上, 且 $\frac{DE}{EB} = \frac{DF}{FD_1} = \frac{1}{2}$, G 在 CC_1

上且平面 $AEF \parallel$ 平面 BD_1G , 则 $\frac{CG}{CC_1} =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$



7. 在直角坐标系 xOy 中, 半径为 $1m$ 的 $\odot C$ 在 $t=0$ 时圆心 C 与原点 O 重合, $\odot C$ 沿 x 轴以 $1m/s$ 的速度匀速向右移动, $\odot C$ 被 y 轴所截的左方圆弧长记为 x , 令 $y = \cos x$, 则 y 关于时间 t ($0 \leq t \leq 1$, 单位: s) 的函数的图象大致为

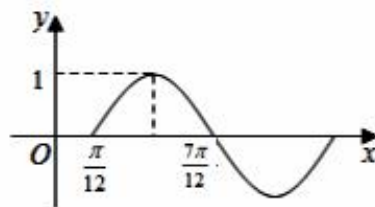


8. $(mx + \sqrt{x})^n (n \in N_+)$ 的展开式中, 各二项式系数和为 32, 各项系数和为 243, 则展开式中 x^3 的系数为
- A. 40 B. 30 C. 20 D. 10

9. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (x \in R) (\omega > 0, -\pi < \varphi < 0)$ 的部分图象如图所示, 如果 $x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$,

$x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$



10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, 球 O 的半径为 4, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 记 $\triangle ABC$ 的外心为 O_1 . 若三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $12\sqrt{3}$, 则 $PO_1 =$

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{7}$

11. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 $F(c, 0)$, 若圆 $A: (x+a)^2 + y^2 = a^2$ 与直线 $bx - ay = 0$ 交于坐标原点 O 及另一点 E , 且存在以 O 为圆心的圆与线段 EF 相切, 切点为 EF 的中点, 则双曲线的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

12. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & (x < 0) \\ xe^{1-x} & (x \geq 0) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - af(x) + a - a^2 = 0$ 有四个不等的实数根, 则 a 的取值范围是

- A. $(\frac{4}{5}, 1]$ B. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup \{1\}$ D. $(-1, 0) \cup \{1\}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 且 $\vec{a} = (-1, 3)$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = 3^{|x-a|} (a \in R)$ 满足 $f(x) = f(4-x)$, 则实数 a 的值为_____.

15. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n^2 - (n^2 + n - 2)S_n - 2(n^2 + n) = 0, n \in N^*$, 则数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 2020 项和 $T_{2020} =$ _____.

16. 设抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 弦 AB 过点 F 且中点为 M , 过点 F, M 分别作 AB 的垂线交 l 于点 P, Q , 若 $|AF| = 3|BF|$, 则 $|FP| \cdot |MQ| =$ _____.

三、解答题: (共 70 分)

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c = b(\cos A + \sqrt{3} \sin A)$.

(I) 求角 B 的大小;

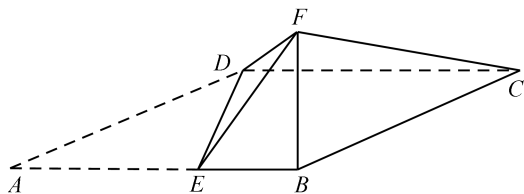
(II) 若 $a = 4$, 且 BC 边上的高为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 点 E 在 AB 上, $AE = 2EB = 2$, 且 $DE \perp AB$. 以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 A 到达点 F 的位置, 且 $\angle FEB = 60^\circ$.

(I) 求证: 平面 $BFC \perp$ 平面 $BCDE$;

(II) 若直线 DF 与平面 $BCDE$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$, 求二面角 $E-DF-C$ 的正弦值.



19. (本小题满分 12 分)

为了保障某治疗新冠肺炎药品的主要药理成分在国家药品监督管理局规定的值范围内, 武汉某制药厂在该药品的生产过程中, 检验员在一天中按照规定从该药品生产线上随机抽取 20 件产品进行检测, 测量其主要药理成分含量 (单位: mg). 根据生产经验, 可以认为这条药品生产线正常状态下生产的产品的的主要药理成分含量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 在一天内抽取的 20 件产品中, 如果有一件出现了主要药理成分含量在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的药品, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对本次的生产过程进行检查.

(I) 下面是检验员在 2 月 24 日抽取的 20 件药品的主要药理成分含量:

9.78	10.04	9.92	10.14	10.04	9.22	10.13	9.91	9.95
9.96	9.88	10.01	9.98	9.95	10.05	10.05	9.96	10.12

经计算得 $\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 9.96$, $s = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{20} (\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20\bar{x}^2)} \approx 0.19$.

其中 x_i 为抽取的第 i 件药品的主要药理成分含量, $i = 1, 2, \dots, 20$. 用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$, 利用估计值判断是否需对本次的生产过程进行检查?

(II) 假设生产状态正常, 记 X 表示某天抽取的 20 件产品中其主要药理成分含量在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的药品件数, 求 $P(X=1)$ 及 X 的数学期望.

附: 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$, $0.9974^{19} \approx 0.95$.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两

点. $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4\sqrt{2}$, 且椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设点 P 为椭圆 C 的下顶点, 直线 PA, PB 与 $y = 2$ 分别交于点 M, N , 当 $|MN|$ 最小时, 求直线 AB 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - x - 1$, 且 $f(x) \geq 0$.

(I) 求 a ;

(II) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$), 记直线 AB 的斜率为 k , 问: 是否存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) = k$ 成立? 若存在, 求出 x_0 的值 (用 x_1, x_2 表示); 若不存在, 请说明理由.

请从下面所给的 22、23 两题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑, 按所涂题号进行评分; 不涂、多涂均按所答第一题评分; 多答按所答第一题评分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程.

在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方

程为 $\rho^2 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) = 12$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与曲线 C 交于 M, N

两点.

(I) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$, 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的值;

(II) 求曲线 C 的内接矩形周长的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

已知函数 $f(x) = x|x - a|$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $f(2) + f(-2) > 4$ 时, 求 a 的取值范围;

(II) 若 $a > 0$, $\forall x, y \in (-\infty, a]$, 不等式 $f(x) \leq |y + 3| + |y - a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

重庆八中高 2020 级高三（下）第 2 次月考

文科数学试题

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0\}$

2. 在复平面内，复数 $z = \frac{2}{1+i}$ 所对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 2016 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 270 粒内夹谷 30 粒，则这批米内夹谷约为

- A. 222 石 B. 224 石 C. 230 石 D. 232 石

4. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的最大值是

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

5. 设 O 为坐标原点， F 为抛物线 $y^2 = 2ax (a \neq 0)$ 的焦点，若点 $A(\frac{a}{2}, a)$ 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AF} = -4$, 则 a 为

- A. -2 B. 2 C. ± 2 D. ± 1

6. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_5 = 2S_{10}$, 则 $\frac{2S_5 + 8S_{15}}{S_{10} - S_5} =$

- A. -12 B. 16 C. 12 D. -16

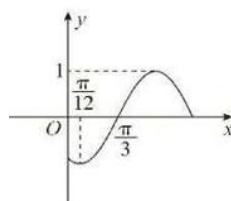
7. 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $\angle A$ 的最大值是

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi) (\omega > 0, |\phi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如右图所示，

则函数 $f(x)$ 的解析式为

- A. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ B. $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$
C. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ D. $f(x) = -\sin(2x + \frac{\pi}{3})$



9. 棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F, G 分别为棱 AB, CC_1, C_1D_1 的中点，则过 E, F, G 三点的平面截正方体所得截面面积为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

10. 若 $0 < x < y < \frac{\pi}{4}$, $m = \sin x + \cos x$, $n = \sin y + \cos y$, 则

- A. $m^2 > n^2$ B. $m^2 < n^2$ C. $mn < 1$ D. $mn > 2$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右焦点为 F ，过原点 O 的直线与 C 交于 P, Q 两点，若 $PF \perp OF, \angle OFQ = 30^\circ$ ，则双曲线 C 的离心率为
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3
12. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且在 $(-\infty, 0]$ 单调递增. 设 $a > 0$ ，当 $m + n = a$ 时，恒有 $f(m) + f(a) > f(n)$ ，则 m 的取值范围是
- A. $(-a, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-a, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

第 II 卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，且 $\vec{a} = (-1, 3), |\vec{b}| = \sqrt{10}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
14. 古人认为，天下万物皆由金、木、水、火、土五类元素组成，如图，分别是金、木、水、火、土彼此之间存在的相生相克的关系. 若从 5 类元素中任选 2 类元素，则 2 类元素相克的概率为 _____.



15. α, β 分别是关于 x 的方程 $\log_2 x + x - 5 = 0$ 和 $2^x + x - 5 = 0$ 的根，则 $\alpha + \beta =$ _____.
16. 已知某圆柱轴截面的周长为 12，当该圆柱体积最大时其侧面积为 _____.

三、解答题：（本大题共 6 小题共 70 分）

17. （本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n, n \in N^*$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3, b_4 = 23$ ，且数列 $\{b_n - a_n\}$ 是等差数列.

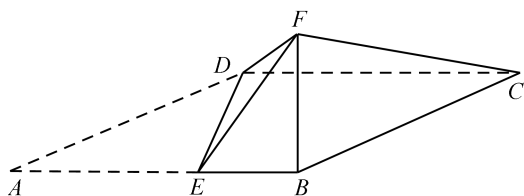
- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (II) 令 $c_n = b_n - a_n$ ，求数列 $\left\{b_n + \frac{1}{c_n c_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 点 E 在 AB 上, $AE = 2EB = 2$, 且 $DE \perp AB$. 以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 A 到达点 F 的位置, 且 $\angle FEB = 60^\circ$.

(I) 求证: 平面 $BFC \perp$ 平面 BDC ;

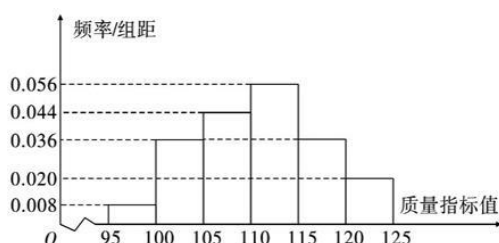
(II) 若直线 DF 与平面 $BCDE$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$, 求点 C 到平面 DEF 的距离.



19. (本小题满分 12 分)

某企业有甲、乙两套设备生产同一种产品, 为了检测两套设备的生产质量情况, 随机从两套设备生产的大量产品中各抽取了 50 件产品作为样本, 检测一项质量指标值, 若该项质量指标值落在 $[100, 120)$ 内, 则为合格品, 否则为不合格品. 现统计得到相关统计情况如下:

甲套设备的样本的频率分布直方图



乙套设备的样本的频数分布表

质量指标值	$[95, 100)$	$[100, 105)$	$[105, 110)$	$[110, 115)$	$[115, 120)$	$[120, 125]$
频数	1	6	19	18	5	1

(1) 根据上述所得统计数据, 计算产品合格率, 并对两套设备的优劣进行比较;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 95% 的把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与甲、乙两套设备的选择有关.

	甲套设备	乙套设备	合计
合格品			
不合格品			
合计			

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与 C 交于 M, N 两点. $\triangle MNF_2$ 的周长为 8, 且 $|MN|$ 的最小值为 3.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设椭圆 C 的右顶点为 A , 直线 AM, AN 分别交直线 $x = -4$ 于 P, Q 两点, 当 $\triangle PQF_1$ 的面积是 $\triangle AMN$ 面积的 5 倍时, 求直线 MN 的方程.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x - x \ln a$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求证: $f(x) < \sqrt{x}$; (II) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

请从下面所给的 22、23 两题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑, 按所涂题号进行评分; 不涂、多涂均按所答第一题评分; 多答按所答第一题评分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程.

在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) = 12$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点.

(I) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$, 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的值;

(II) 求曲线 C 的内接矩形周长的最大值

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

已知函数 $f(x) = x|x - a|, a \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $f(2) + f(-2) > 4$ 时, 求 a 的取值范围;

(II) 若 $a > 0$, $\forall x, y \in (-\infty, a]$, 不等式 $f(x) \leq |y + 3| + |y - a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.