

第二章 函数、导数及其应用



第一节 函数及其表示

- 考纲要求：**1. 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.
2. 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.
3. 了解简单的分段函数，并能简单应用.

■ 课前·双基落实 夯基点 扫盲点

知识点一 函数与映射的概念

	函数	映射
两集合 A, B	设 A, B 是两个 <u>非空的数集</u>	设 A, B 是两个 <u>非空的集合</u>
对应关系 $f: A \rightarrow B$	如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 <u>任意一个数</u> x , 在集合 B 中都有 <u>唯一确定的数</u> $f(x)$ 和它对应	如果按某一个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 <u>任意一个元素</u> x , 在集合 B 中都有 <u>唯一确定的元</u> 素 y 与之对应
名称	称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数	称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射

易误提醒 易混“函数”与“映射”的概念：函数是特殊的映射，映射不一定是函数，从 A 到 B 的一个映射， A, B 若不是数集，则这个映射便不是函数.

知识点二 函数的有关概念

1. 函数的定义域、值域

(1) 在函数 $y=f(x)$, $x \in A$ 中，自变量 x 的取值范围(数集 A)叫作函数的定义域；函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫作函数的值域.

(2) 如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，则这两个函数为相等函数.

2. 函数的表示方法

表示函数的常用方法有解析法、图象法和列表法.

3. 分段函数

(1) 若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数.

(2)分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，其值域等于各段函数的值域的并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数.

易误提醒 (1)解决函数的一些问题时，易忽视“定义域优先”的原则.

(2)误把分段函数理解为几个函数组成.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一函数的定义域问题

角度一 求给定解析式函数的定义域

【例 1-1】函数 $f(x)=\ln(x-1)+\frac{3x+5}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为()

- A. $[1, 2]$ B. $(1, 2)$ C. $[1, 2)$ D. $(1, 2]$

解析：要使 $f(x)$ 有意义，需 $\begin{cases} x-1>0, \\ 2-x>0, \end{cases}$ 解得 $1<x<2$ ，故选 B.

答案：B

角度二 求抽象函数的定义域

【例 1-2】已知函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$ ，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域为()

- A. $[-3, 7]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-5, 5]$ D. $\left[0, \frac{5}{2}\right]$

解析：由 $x \in [-2, 3]$ ，得 $x+1 \in [-1, 4]$ ，由 $2x-1 \in [-1, 4]$ ，得 $x \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$ ，故选 D.

答案：D

角度三 已知函数定义域求参数范围

【例 1-3】若函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+2ax-a-1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则 a 的取值范围为_____.

解析：因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，所以 $2x^2+2ax-a-1 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，
即 $2x^2+2ax-a \geq 2^0$ ， $x^2+2ax-a \geq 0$ 恒成立，因此有 $\Delta=(2a)^2+4a \leq 0$ ，解得 $-1 \leq a \leq 0$.

答案： $[-1, 0]$

——方法·规律——

求函数定义域的类型与方法及注意点

- (1)已知函数的解析式：构造使解析式有意义的不等式(组)求解.
- (2)对实际问题：由实际意义及使解析式有意义构成的不等式(组)求解.
- (3)抽象函数：①若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 求出；

②若已知函数 $f(g(x))$ 定义域为 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时的值域.

(4)定义域是一个集合，要用集合或区间表示，若用区间表示，不能用“或”连接，而应该用并集符号“ $\cup$ ”连接.

【变式训练 1】(1)函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为()

A. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

B. $(2, +\infty)$

C. $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

D. $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

(2)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$ ，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为()

A. $(-1, 1)$

B. $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$

C. $(-1, 0)$

D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

(3)已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的取值范围是()

A. $-12 < a \leq 0$

B. $-12 < a < 0$

C. $a > \frac{1}{3}$

D. $a \leq \frac{1}{3}$

解析：(1) $(\log_2 x)^2 - 1 > 0$ ，即 $\log_2 x > 1$ 或 $\log_2 x < -1$ ，解得 $x > 2$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$ ，所以定义

域为 $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ ，故选 C.

(2)由函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$ ，则使函数 $f(2x+1)$ 有意义，

需满足 $-1 < 2x+1 < 0$ ，解得 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ，即所求函数的定义域为 $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$ ，故选

B.

(3)因为函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

所以 $ax^2+ax-3 \neq 0$ ，所以 $a=0$ 或 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = a^2 + 12a < 0, \end{cases}$ 解得 $-12 < a \leq 0$ ，故选 A.

答案：(1)C (2)B (3)A

考点二函数的值域问题

【例 2】求下列函数的值域.

(1) $y = \sqrt{-2x^2 + x + 3}$; (2) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$; (3) $y = \frac{1+x+x^2}{1+x^2}$; (4) $y = x + \sqrt{x-1}$;

(5) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$; (6) $y = |x+1| + |x-2|$.

解：(1)(配方法) $y = \sqrt{-2\left[x - \frac{1}{4}\right]^2 + \frac{25}{8}}$, $\therefore 0 \leq y \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}$, $\therefore$ 值域为 $\left[0, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right]$.

(2)(反解法)由 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, 得 $e^x = \frac{1+y}{1-y}$. $\because e^x > 0$, $\therefore \frac{1+y}{1-y} > 0$, 解得 $-1 < y < 1$,

$\therefore y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的值域为 $(-1, 1)$.

(3)(判别式法) $y = \frac{1+x+x^2}{1+x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

将原函数化为关于 x 的一元二次方程, 得 $(y-1)x^2 - x + (y-1) = 0$.

当 $y \neq 1$ 时, 由 $x \in \mathbf{R}$, 得 $\Delta = (-1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$, 解得 $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$;

当 $y = 1$ 时, $x = 0$, 而 $1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $\therefore y = \frac{1+x+x^2}{1+x^2}$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(4)(单调性法) $y = x + \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 且该函数在定义域上单调递增,

当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 1$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 故 $y = x + \sqrt{x-1}$ 的值域为 $[1, +\infty)$.

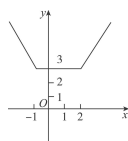
(5)(换元法和不等式法)令 $t = \sqrt{x+2} (t \geq 0)$, 则 $x+3 = t^2+1$. 当 $t > 0$ 时,

函数化为 $y = \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \leq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $t = 1$, 即 $x = -1$ 时取等号);

当 $t = 0$ 时, $y = 0$. 综上, $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ 的值域为 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(6)方法一：(绝对值不等式法)

由于 $|x+1| + |x-2| \geq |(x+1) - (x-2)| = 3$,



所以函数值域为 $[3, +\infty)$.

方法二：(数形结合法) $y = \begin{cases} -2x+1 & (x < -1), \\ 3 & (-1 \leq x \leq 2), \\ 2x-1 & (x > 2). \end{cases}$ 画出此分段函数的图象如图,

可知值域为 $[3, +\infty)$.

——方法·规律——

求函数值域的常用方法

(1)配方法：二次函数或可转化为形如 $F(x) = a[f(x)]^2 + bf(x) + c$ 类型的函数值域问题, 均

可用配方法，而后一种情况要注意 $f(x)$ 的范围。

(2)反解法(或分离常数法)：形如 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$) 或 $y = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 或 $y = \frac{\sin x-1}{\sin x+2}$ 的函数，可用反解法或分离常数法求解。

(3)判别式法：形如 $y = \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ (其中 a_1, a_2 不全为 0 且 $a_2x^2+b_2x+c_2 \neq 0$) 的函数可用判别式法。

(4)单调性法：利用函数在定义域上单调递增或单调递减求值域。

(5)换元法(代数换元法和三角换元法)：以新变量代替函数式中的某些量，实施“变量代换”，通过换元将所给函数化成值域容易求的另一类函数，从而求得原函数的值域。

(6)不等式法：形如 $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的函数可用均值不等式法求解，但必须满足“一正、二定、三相等”这三个条件。

(7)数形结合法：对于分段函数或含有绝对值符号的函数(如 $y = |x-1| + |x+4|$) 可用数形结合法求值域。

【变式训练 2】下列函数中，值域为 $(0, +\infty)$ 的是()

A. $y = x^2 - x + 1$

B. $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$

C. $y = e^{\sin x}$

D. $y = (x+1) - \frac{2}{3}$

解析：∵ $y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ，∴ $y \geq \frac{3}{4}$ ，∴ 排除 A 项。

又 $y = x + \frac{1}{x} \geq 2 (x > 0)$ ，排除 B 项。∵ $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，∴ $y = e^{\sin x} \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ ，

∴ 排除 C 项，故选 D。

答案：D

考点三函数解析式的求法

【例 3】(1)已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)已知 $f\left(\frac{2}{x} + 1\right) = \lg x$ ，求 $f(x)$ 的解析式；

(3)已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0) = 0$ ， $f(x+1) = f(x) + x + 1$ ，求 $f(x)$ ；

(4)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x-1}$ ，求 $f(x)$ 。

解：(1) 由于 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ ，所以 $f(x)=x^2-2$ ，($x \geq 2$ 或 $x \leq -2$)。

(2) 令 $\frac{2}{x}+1=t$ 得 $x=\frac{2}{t-1}$ ，代入得 $f(t)=\lg \frac{2}{t-1}$ 。

又 $x > 0$ ，所以 $t > 1$ ，故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\lg \frac{2}{x-1}$ ($x > 1$)。

(3) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)，由 $f(0)=0$ ，知 $c=0$ ， $f(x)=ax^2+bx$ 。

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$ ，得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$ ，

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$ ，所以 $\begin{cases} 2a+b=b+1, \\ a+b=1, \end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{1}{2}$ ，

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ ($x \in \mathbf{R}$)。

(4) 在 $f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}-1$ 中，用 $\frac{1}{x}$ 代替 x ，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(x)\frac{1}{\sqrt{x}}-1$ ，

将 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2f(x)}{\sqrt{x}}-1$ 代入 $f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}-1$ 中，可求得 $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}$ 。

——方法·规律——

求函数解析式常用的方法

(1) 配凑法：由已知条件 $f(g(x))=F(x)$ ，可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的表达式，然后以 x 替代 $g(x)$ ，便得 $f(x)$ 的表达式；

(2) 换元法：已知复合函数 $f(g(x))$ 的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围；

(3) 待定系数法：若已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法；

(4) 消去法：已知关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(-x)$ 的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程求出 $f(x)$ 。

【变式训练 3】(1) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式。

(2) 定义在 $(-1, 1)$ 内的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$ ，求 $f(x)$ 的解析式。

解：(1) 方法一：设 $t=\sqrt{x}+1$ ，则 $x=(t-1)^2$ ($t \geq 1$)。代入原式，得

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-2t+1+2t-2=t^2-1, \therefore f(x)=x^2-1 (x \geq 1).$$

方法二： $\because x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1-1=(\sqrt{x}+1)^2-1$ ，

$\therefore f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$ ($\sqrt{x}+1 \geq 1$)，即 $f(x)=x^2-1$ ($x \geq 1$)。

(2) 当 $x \in (-1, 1)$ 时，

有 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$ ，①

以 $-x$ 代替 x 得, $2f(-x)-f(x)=\lg(-x+1)$. ②

由①②消去 $f(-x)$, 得 $f(x)=\frac{2}{3}\lg(x+1)+\frac{1}{3}\lg(1-x)$, $x\in(-1, 1)$.

考点四分段函数

角度一 求分段函数的函数值

【例 4-1】设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & (x\leq 1), \\ 2, & (x>1), \end{cases}$ 则 $f(f(3))$ 等于()

A. $\frac{1}{5}$ B. 3 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{13}{9}$

解析: 因为 $f(3)=\frac{2}{3}$, 所以 $f(f(3))=f(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^2+1=\frac{4}{9}+1=\frac{13}{9}$, 故选 D.

答案: D

角度二 解分段函数方程

【例 4-2】设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, & x\leq 0, \\ -x^2, & x>0. \end{cases}$

若 $f(f(a))=2$, 则 $a=$ _____.

解析: 当 $a\leq 0$ 时, $f(a)=a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0$, $f(f(a))<0$, 显然不成立; 当 $a>0$ 时, $f(a)=-a^2<0$, 所以 $f(f(a))=a^4-2a^2+2=2$, 解得 $a=\pm\sqrt{2}$ 或 $a=0$. 因为 $a>0$, 所以 $a=\sqrt{2}$.

答案: $\sqrt{2}$

角度三 解分段函数不等式

【例 4-3】设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x<1, \\ \frac{1}{x^3}, & x\geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x)\leq 2$ 成立的 x 的取值范围是_____.

解析: 当 $x<1$ 时, 由 $e^{x-1}\leq 2$ 得 $x\leq 1+\ln 2$,

$\therefore x<1$; 当 $x\geq 1$ 时, 由 $\frac{1}{x^3}\leq 2$ 得 $x\leq 8$, $\therefore 1\leq x\leq 8$. 综上, 符合题意的 x 的取值范围是 $x\leq 8$.

答案: $(-\infty, 8]$

角度四 求分段函数的值域(最值)

【例 4-4】若函数 $f(x)=\begin{cases} -x+6, & x\leq 2, \\ 3+\log_a x, & x>2 \end{cases}$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)的值域是 $[4, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析: $\because$ 当 $x\leq 2$ 时, $f(x)\in[4, +\infty)$, $\therefore$ 当 $x>2$ 时, $3+\log_a x$ 的值域为 $[4, +\infty)$ 的子

集，

$$\therefore \begin{cases} a > 1, \\ 3 + \log_a 2 \geq 4, \end{cases} \quad \text{解得 } 1 < a \leq 2.$$

答案：(1, 2]

——方法·规律——

分段函数问题的常见类型及解题策略

(1)求函数值. 弄清自变量所在区间, 然后代入对应的解析式, 求“层层套”的函数值, 要从最内层逐层往外计算.

(2)求函数最值. 分别求出每个区间上的最值, 然后比较大小.

(3)解不等式. 根据分段函数中自变量取值范围的界定, 代入相应的解析式求解, 但要注意取值范围的大前提.

(4)求参数. “分段处理”, 采用代入法列出各区间上的方程求解.

【变式训练 4】(1) $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 0, \\ a^x + b, & x \leq 0, \end{cases}$ 且 $f(0) = 2, f(-1) = 3$, 则 $f(f(-3)) = (\quad)$

A. -2 B. 2 C. 3 D. -3

(2)设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(f(a)) \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

(3)设 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为()

A. $[-1, 2]$ B. $[-1, 0]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

解析: (1)由题意得 $f(0) = a^0 + b = 1 + b = 2$, 解得 $b = 1$; $f(-1) = a^{-1} + b = a^{-1} + 1 = 3$,

解得 $a = \frac{1}{2}$. 故 $f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 1 = 9$, 从而 $f(f(-3)) = f(9) = \log_3 9 = 2$, 故选 B.

(2)结合图形(图略), 由 $f(f(a)) \leq 2$ 可得 $f(a) \geq -2$, 可得 $a \leq \sqrt{2}$.

(3) $\because$ 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = (x-a)^2$, 又 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, $\therefore a \geq 0$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} + a \geq 2 + a$, 当且仅当 $x = 1$ 时取“=”,

要满足 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 需 $2 + a \geq f(0) = a^2$, 即 $a^2 - a - 2 \leq 0$,

解得 $-1 \leq a \leq 2$, $\therefore a$ 的取值范围是 $0 \leq a \leq 2$.

答案: (1)B (2) $(-\infty, \sqrt{2}]$ (3)D

第二节 函数的单调性与最值

考纲要求: 1.理解函数的单调性及其几何意义.

2. 理解函数的最大值、最小值及其几何意义.

■ 课前·双基落实 夯基点 扫盲点

知识点一 单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，如果对于定义域内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图象描述	 自左向右看图象是上升的	 自左向右看图象是下降的

必记结论 设任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 < x_2$ ，那么

(1) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数， $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数.

(2) $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数， $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数.

知识点二 单调区间的定义

若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，则称函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，区间 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

易误提醒 单调区间是定义域的子集，故求函数的单调区间应树立定义域优先的原则. 当函数有多个单调区间时，应分别书写，不能用并集符号“ $\cup$ ”联接.

必记结论 对勾函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的增区间为 $(-\infty, -\sqrt{a})$ 和 $[\sqrt{a}, +\infty)$ ，减区间为 $[-\sqrt{a}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{a}]$ ，且对勾函数为奇函数.

知识点三 复合函数的单调性

如果 $y=f(u)$ ， $u=g(x)$ ，那么函数 $y=f(g(x))$ 叫做复合函数，其中 $y=f(u)$ 叫做外层函数，

$u=g(x)$ 叫做内层函数. 若内外层函数单调性相同, 则 $y=f(g(x))$ 为增函数; 若内外层函数单调性相反, 则 $y=f(g(x))$ 为减函数, 简记“同增异减”.

知识点四 函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足	
条件	(1) 对于任意 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$; (2) 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$.	(1) 对于任意 $x \in I$, 都有 $f(x) \geq M$; (2) 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$.
结论	M 为最大值	M 为最小值

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一 函数单调性的判断

【例 1】试讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$ 的单调性(其中 $a \neq 0$).

解: 方法一(定义法):

$$\text{设 } x_1, x_2 \in (-1, 1) \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1}{x_1^2-1} - \frac{ax_2}{x_2^2-1} = \frac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)},$$

因为 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1^2 - 1 < 0$, $x_2^2 - 1 < 0$, $-1 < x_1x_2 < 1$, $x_1x_2 + 1 > 0$,

所以 $\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} > 0$. 因此, 当 $a > 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$, 此时函数在 $(-1, 1)$ 为减函数; 当 $a < 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 此时函数在 $(-1, 1)$ 为增函数.

方法二(导数法):

$$f'(x) = \frac{a(x^2-1) - 2ax^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-a(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) < 0; \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

所以当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为减函数; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数.

——方法·规律——

给出解析式函数单调性的两种判定方法

(1) 定义法(基本步骤为取值、作差或作商、变形、判断).

(2) 导数法(基本步骤为求定义域、求导、变形、判断).

变式训练 1】下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是()

A. $f(x) = 3 - x$

B. $f(x) = x^2 - 3x$

C. $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

D. $f(x) = -|x|$

解析：当 $x > 0$ 时， $f(x) = 3 - x$ 为减函数；当 $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ 为减函数，
当 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ 为增函数；当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ 为增函数；

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = -|x|$ 为减函数，故选 C.

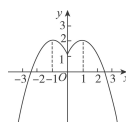
答案：C

考点二 求函数的单调区间

【例 2】求下列函数的单调区间：

(1) $y = -x^2 + 2|x| + 1$;

(2) $y = \log(x^2 - 3x + 2)$.



解：(1) 由于 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ ，即 $y = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2 & (x \geq 0) \\ -(x+1)^2 + 2 & (x < 0) \end{cases}$.

画出函数图象如图所示，单调递增区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[0, 1)$ ，单调递减区间为 $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty)$.

(2) 令 $u = x^2 - 3x + 2$ ，则原函数可以看作 $y = \log u$ 与 $u = x^2 - 3x + 2$ 的复合函数.

令 $u = x^2 - 3x + 2 > 0$ ，则 $x < 1$ 或 $x > 2$.

$\therefore$ 函数 $y = \log(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

又 $u = x^2 - 3x + 2$ 的对称轴 $x = \frac{3}{2}$ ，且开口向上.

$\therefore u = x^2 - 3x + 2$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是单调递减函数，在 $(2, +\infty)$ 上是单调递增函数.

而 $y = \log u$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增函数，

$\therefore y = \log(x^2 - 3x + 2)$ 的单调递减区间为 $(2, +\infty)$ ，单调递增区间为 $(-\infty, 1)$.

——方法·规律——

求函数的单调区间的常用方法

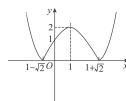
(1) 利用已知函数的单调性，即转化为已知函数的和、差或复合函数，求单调区间.

(2) 定义法：先求定义域，再利用单调性定义.

(3) 图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，可由图象的直观性写出它的单调区间.

(4) 导数法：利用导数取值的正负确定函数的单调区间.

【变式训练 2】求函数 $y = |-x^2 + 2x + 1|$ 的单调区间.



解：函数 $y=|-x^2+2x+1|$ 的图象，如图所示.

由图象可知，函数 $y=|-x^2+2x+1|$ 的单调递增区间为 $(1-\sqrt{2}, 1)$ 和 $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ ；单调递减区间为 $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ 和 $(1, 1+\sqrt{2})$.

考点三函数单调性的应用

角度一 求函数的值域或最值

【例 3-1】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+\frac{2}{x}-3, & x\geq 1, \\ \lg(x^2+1), & x<1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3))=$ _____, $f(x)$ 的最小值是_____.

解析：由题知， $f(-3)=1$ ， $f(1)=0$ ，即 $f(f(-3))=0$. 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, \sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=\min\{f(0), f(\sqrt{2})\}=2\sqrt{2}-3$.

答案：0 $2\sqrt{2}-3$

角度二 比较函数值或自变量的大小

【例 3-2】已知函数 $f(x)=\log_2 x + \frac{1}{1-x}$ ，若 $x_1 \in (1, 2)$ ， $x_2 \in (2, +\infty)$ ，则()

- A. $f(x_1) < 0$ ， $f(x_2) < 0$ B. $f(x_1) < 0$ ， $f(x_2) > 0$
C. $f(x_1) > 0$ ， $f(x_2) < 0$ D. $f(x_1) > 0$ ， $f(x_2) > 0$

解析： $\because$ 函数 $f(x)=\log_2 x + \frac{1}{1-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(2)=0$ ，

$\therefore$ 当 $x_1 \in (1, 2)$ 时， $f(x_1) < f(2)=0$ ，当 $x_2 \in (2, +\infty)$ 时， $f(x_2) > f(2)=0$ ，
即 $f(x_1) < 0$ ， $f(x_2) > 0$ ，故选 B.

答案：B

角度三 解函数不等式

【例 3-3】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leq 0, \\ \ln(x+1), & x>0, \end{cases}$ 若 $f(2-x^2) > f(x)$ ，则实数 x 的取值范围是()

- A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 2)$ D. $(-2, 1)$

解析： $\because$ 当 $x=0$ 时，两个表达式对应的函数值都为零， $\therefore$ 函数的图象是一条连续的曲线.

$\because$ 当 $x \leq 0$ 时，函数 $f(x)=x^3$ 为增函数，当 $x > 0$ 时， $f(x)=\ln(x+1)$ 也是增函数，

且当 $x_1 < 0$ ， $x_2 > 0$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

因此，不等式 $f(2-x^2) > f(x)$ 等价于 $2-x^2 > x$ ，即 $x^2+x-2 < 0$ ，解得 $-2 < x < 1$ ，故选

D.

答案：D

角度四 利用单调性求参数的取值范围

【例 3-4】已知 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x+1 & (x < 1) \\ a^x & (x \geq 1) \end{cases}$ ，满足对任意 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} >$

0 成立，那么 a 的取值范围是()

- A. $[\frac{3}{2}, 2]$ B. $[1, \frac{3}{2}]$ C. $(1, 2)$ D. $(1, +\infty)$

解析：依题意， $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，于是有 $\begin{cases} 2-a > 0, \\ a > 1, \\ (2-a) \times 1 + 1 \leq a^1. \end{cases}$

解得 $\frac{3}{2} \leq a < 2$ ，故选 A.

答案：A

——方法·规律——

函数单调性应用问题的常见类型及解题策略

(1)比较大小. 比较函数值的大小，应将自变量转化到同一个单调区间内，然后利用函数的单调性解决.

(2)解不等式. 在求解与抽象函数有关的不等式时，往往是利用函数的单调性将“ f ”符号脱掉，使其转化为具体的不等式求解. 此时应特别注意函数的定义域.

(3)利用单调性求参数.

①视参数为已知数，依据函数的图象或单调性定义，确定函数的单调区间，与已知单调区间比较求参数；

②需注意若函数在区间 $[a, b]$ 上是单调的，则该函数在此区间的任意子集上也是单调的.

(4)利用单调性求最值. 应先确定函数的单调性，然后再由单调性求出最值.

【变式训练 3】(1)函数 $y = \frac{x-5}{x-a-2}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是()

- A. $a = -3$ B. $a < 3$ C. $a < -3$ D. $a \geq -3$

(2)定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，且 $f(\frac{1}{2})=0$ ，则满足 $f(\log x) > 0$ 的 x 的集合为_____。

解析：(1) $y = \frac{x-5}{x-a-2} = 1 + \frac{a-3}{x-(a+2)}$ ，由函数在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，

有 $\begin{cases} a-3 < 0, \\ a+2 \leq -1, \end{cases}$ 解得 $a < -3$ ，故选 C.

(2)由奇函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 得函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递增, 且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. 由 $f(\log x)>0$, 得 $\log x>\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<\log x<0$, 解得 $0<x<\frac{1}{3}$ 或 $1<x<3$. 所以

满足条件的 x 的取值集合为 $\left\{x \mid 0<x<\frac{1}{3}, \text{ 或 } 1<x<3\right\}$.

答案: (1)C (2) $\left\{x \mid 0<x<\frac{1}{3}, \text{ 或 } 1<x<3\right\}$

考点四抽象函数的单调性

【例 4】函数 $f(x)$ 对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)-1$, 且当 $x>0$ 时, 有 $f(x)>1$.

(1)求证: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(2)若 $f(4)=5$, 解不等式 $f(2t-1)-f(1+t)<2$.

思路点拨: (1)用单调性的定义证明抽象函数的单调性; (2)结合题意, 将含“ f ”的不等式 $f(2t-1)-f(1+t)<2$ 转化为 $f(m)<f(n)$ 的形式, 再依据单调性转化为常规不等式求解.

解: (1)证明: 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$, 则 $x_2-x_1>0$, $\therefore f(x_2-x_1)>1$.

根据条件等式有: $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=$

$f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$, $\therefore f(x_1)<f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2)由 $f(a+b)=f(a)+f(b)-1$, 得 $f(a+b)-f(a)=f(b)-1$, $\therefore f(2t-1)-f(1+t)=f(t-2)-1$, $\therefore f(2t-1)-f(1+t)<2$, 即 $f(t-2)-1<2$, $\therefore f(t-2)<3$.

又 $f(2+2)=f(2)+f(2)-1=5$, $\therefore f(2)=3$, $\therefore f(t-2)<3=f(2)$. $\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$\therefore t-2<2$, $\therefore t<4$, 故不等式的解集为 $(-\infty, 4)$.

——方法·规律——

利用函数单调性的定义判断抽象函数的单调性

↓

根据条件将抽象函数不等式变形为 $f(m)<f(n)$ 的形式

↓

根据所判断的抽象函数的单调性将函数不等式 $f(m)<f(n)$ 转化为常规不等式 $m<n$ (或 $m>n$)



解不等式 $m < n$ 得所求结果

变式训练 4】已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调增函数，满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ， $f(3) = 1$ ，

当 $f(x) + f(x-8) \leq 2$ 时， x 的取值范围是()

- A. $(8, +\infty)$ B. $(8, 9]$ C. $[8, 9]$ D. $(0, 8)$

解析： $2 = 1 + 1 = f(3) + f(3) = f(9)$ ，

由 $f(x) + f(x-8) \leq 2$ ，可得 $f[x(x-8)] \leq f(9)$ ，因为 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，所

$$\text{以有} \begin{cases} x > 0, \\ x-8 > 0, \\ x(x-8) \leq 9, \end{cases} \quad \text{解得 } 8 < x \leq 9, \text{ 故选 B.}$$

答案：B

第三节 函数的奇偶性与周期性

考纲要求：1. 结合具体函数，了解函数奇偶性的含义。

2. 会运用函数图象理解和研究函数的性质。

课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 函数的奇偶性

1. 偶函数：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数。偶函数的图象关于 y 轴 对称。

2. 奇函数：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数。奇函数的图象关于 原点 对称。

易误提醒 (1) 判断函数的奇偶性，易忽视判断函数定义域是否关于原点对称。定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的一个必要不充分条件；(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性时，必须对定义域内的每一个 x ，均有 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$ ，而不能说存在 x_0 使 $f(-x_0) = -f(x_0)$ 或 $f(-x_0) = f(x_0)$ 。

知识点二 函数的周期性

1. 周期函数：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T) = f(x)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为这个函数的一个周期。

2. 最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个 最小 的正数，那么这个 最小正数 就叫做 $f(x)$ 的最小正周期。

3. 函数周期性的常用结论

(1)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$, 则 $f(x+2a)=f[(x+a)+a]=-f(x+a)=f(x)$, 所以 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期($a \neq 0$).

(2)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{1}{f(x+a)}=f(x)$, 所以 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期($a \neq 0$).

(3)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x+2a)=f[(x+a)+a]=-\frac{1}{f(x+a)}=f(x)$, 所以 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期($a \neq 0$).

(4)若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$, $x=b(b>a)$ 对称, 则 $f(x)=f(2a-x)$, $f(x)=f(2b-x)$, 故 $f(2a-x)=f(2b-x)$. 用 $2a-x$ 替换上式中的 x , 得 $f(x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)]$, 所以 $2(b-a)$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(5)若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$, $(b, 0)(b>a)$ 中心对称, 则 $f(x)=-f(2a-x)$, $f(x)=-f(2b-x)$, 即 $f(2a-x)=f(2b-x)$. 用 $2a-x$ 替换上式中的 x , 得 $f(x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)]$, 所以 $2(b-a)$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(6)若函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 轴对称, 关于点 $(b, 0)$ 中心对称, 则 $f(x)=f(2a-x)$, $f(x)=-f(2b-x)$, 即 $f(2a-x)=-f(2b-x)$. 用 $2a-x$ 替换上式中的 x , 得 $f(x)=-f[2b-(2a-x)]=-f[x+2(b-a)]$. 由结论(1)知 $4(b-a)$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(7)若 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数, 且一个周期为 T , 则 $f(x \pm nT)=f(x)(n \in \mathbf{Z})$.

■ 课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一 函数奇偶性的判断

【例 1】判断下列函数的奇偶性.

$$(1)f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-9};$$

$$(2)f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(3)f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3};$$

$$(4)f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x^2-2, & x<0. \end{cases}$$

解: (1)由 $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x^2-9 \geq 0, \end{cases}$ 得 $x=\pm 3$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $\{-3, 3\}$, 关于原点对称.

又 $f(3)+f(-3)=0$, $f(3)-f(-3)=0$, 即 $f(x)=\pm f(x)$, 所以 $f(x)$ 既是奇函数也是偶函数.

(2) 由 $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} \geq 0, \\ 1+x \neq 0, \end{cases}$ 得 $-1 < x \leq 1$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1]$, 不关于原点对称,

所以 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(3) 由 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ |x+3|-3 \neq 0, \end{cases}$ 得 $-2 \leq x \leq 2$ 且 $x \neq 0$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 2]$,

关于原点对称, 所以 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x+3)-3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$,

$f(-x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{-x} = -f(x)$, 因此, $f(x)$ 是奇函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称.

当 $x > 0$ 时, $f(-x) = -(-x)^2 - 2 = -(x^2 + 2) = -f(x)$;

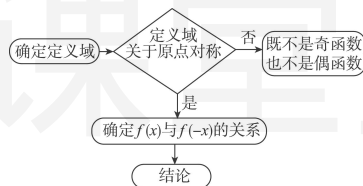
当 $x < 0$ 时, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = -(-x^2 - 2) = -f(x)$;

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 也满足 $f(-x) = -f(x)$. 所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

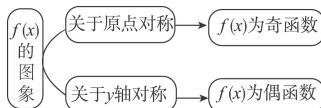
——方法·规律——

判定函数奇偶性的三种常用方法

(1) 定义法:



(2) 图象法:



(3) 性质法:

① 设 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域分别是 D_1 , D_2 , 那么在它们的公共定义域上: 奇 + 奇 = 奇, 奇 $\times$ 奇 = 偶, 偶 + 偶 = 偶, 偶 $\times$ 偶 = 偶, 奇 $\times$ 偶 = 奇.

② 复合函数的奇偶性可概括为“同奇则奇, 一偶则偶”.

[提醒](1) “性质法”中的结论是在两个函数的公共定义域内才成立的. (2) 判断分段函数的奇偶性应分段分别证明 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系, 只有对各段上的 x 都满足相同的关系时, 才能判断其奇偶性.

【变式训练 1】下列函数中为偶函数的是()

- A. $y = x^2 \sin x$ B. $y = x^2 \cos x$ C. $y = |\ln x|$ D. $y = 2^{-x}$

解析：∵ $y=x^2\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 定义域均为 $\mathbf{R}$ 且都是偶函数，∴ $y=x^2\cos x$ 也是偶函数，故选 B.

答案：B

考点二函数奇偶性的应用

【例 2】(1)若函数 $f(x)=\frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数，则实数 a 的值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

(2)已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2-x-1$ ，则当 $x<0$ 时， $f(x)=$ _____.

解析：(1)∵ $f(x)$ 为奇函数，且 $-\frac{1}{2}$ 不在 $f(x)$ 的定义域内，∴ $\frac{1}{2}$ 也不在 $f(x)$ 的定义域内，∴ $\frac{1}{2}-a=0$ ， $a=\frac{1}{2}$ ，故选 A.

(2)当 $x<0$ 时， $-x>0$ ，由题意得 $f(x)=f(-x)=(-x)^2-(-x)-1=x^2+x-1$.

答案：(1)A (2) x^2+x-1

——方法·规律——

函数奇偶性应用问题的解题策略

1. 已知函数的奇偶性求参数值.

(1)利用奇偶函数的定义域关于原点对称的特征求解；

(2)利用定义域上的恒等式 $f(-x)=\pm f(x)$ 求解；

(3)利用定义域上的特殊值求解.

2. 已知函数的奇偶性求解析式. 解答此类问题，要利用函数的奇偶性实现 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 之间的转化.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$ ($a\in\mathbf{R}$) 是奇函数，那么 $a=$ _____.

解析：∵ $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$ 是奇函数，且定义域为 $\mathbf{R}$ ，∴ $f(0)=0$ ，即 $a-1=0$ ， $a=1$.

答案：1

考点三函数的周期性

【例 3】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=-f(x)$ ，当 $-3\leq x<-1$ 时， $f(x)=-(x+2)^2$ ；

当 $-1\leq x<3$ 时， $f(x)=x$ ，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)=$ _____.

解析：∵ $f(x+3)=-f(x)$ ，∴ $f(x+6)=f[(x+3)+3]=-f(x+3)=f(x)$ ，∴ $T=6$.

∵当 $-3\leq x<-1$ 时， $f(x)=-(x+2)^2$ ；当 $-1\leq x<3$ 时， $f(x)=x$ ，

∴ $f(1)=1$ ， $f(2)=2$ ， $f(3)=f(3-6)=f(-3)=-(-3+2)^2=-1$ ， $f(4)=f(4-6)=f(-2)=-$

$(-2+2)^2=0, f(5)=f(5-6)=f(-1)=-1, f(6)=f(6-6)=f(0)=0,$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1, \therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=f(7)+f(8)$
 $+ \cdots + f(12) = \cdots = f(2\,011)+f(2\,012)+ \cdots + f(2\,016)=1,$
 而 $f(2\,017)=f(336 \times 6 + 1)=f(1)=1, \therefore f(1)+f(2)+f(3)+ \cdots + f(2\,017)=336 \times 1 + 1=337.$

答案：337

——方法·规律——

函数周期性问题的解题策略

- (1) 根据题设条件，通过变形并结合周期函数的定义来确定函数的周期。
- (2) 根据周期性和一些已知的函数值可求另外一些函数值。此时周期性起着转化自变量的作用。

【变式训练 3】已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$ ，若 $f(1)=-5$ ，则 $f(f(5))$ = _____.

解析： $\because f(x+2)=\frac{1}{f(x)}, \therefore f(x+4)=f[(x+2)+2]=\frac{1}{f(x+2)}=f(x), \therefore T=4,$

$\therefore f(5)=f(5-4)=f(1)=-5,$

$\therefore f(f(5))=f(-5)=f(-5+4)=f(-1)=f(-1+4)=f(3)=\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{5}.$

答案： $-\frac{1}{5}$

考点四函数性质的综合应用

角度一 奇偶性与单调性的综合

【例 4-1】(2016·天津卷)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[-\infty, 0)$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{a-1}) > f(-\sqrt{2})$ ，则 a 的取值范围是 _____.

解析：由题意，得 $f(2^{a-1}) > f(-\sqrt{2}) \Leftrightarrow f(2^{a-1}) > f(2^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow |a-1| < \frac{1}{2}$ ，解得 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

答案： $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

角度二 周期性与奇偶性的综合

【例 4-2】(2016·四川卷)已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x)=4^x$ ，则 $f(-\frac{5}{2})+f(1)=$ _____.

解析：由题意，得 $f(-1)=-f(1), f(-1)=f(-1+2)=f(1)$ ，故 $-f(1)=f(1)$ ，得 $f(1)=0$.

又 $f(-\frac{5}{2})=f(-\frac{5}{2}+2)=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}$ ，所以 $f(-\frac{5}{2})+f(1)=-2$.

答案：-2

角度三 奇偶性、单调性、周期性的综合

【例 4-3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$ ，且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数，则()

A. $f(-25)<f(11)<f(80)$ B. $f(80)<f(11)<f(-25)$

C. $f(11)<f(80)<f(-25)$ D. $f(-25)<f(80)<f(11)$

解析：因为 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$ ，

所以 $f(x-8)=f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数，则 $f(-25)=f(-1)$ ， $f(80)=f(0)$ ， $f(11)=f(3)$ 。由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足 $f(x-4)=-f(x)$ ，得 $f(11)=f(3)=-f(-1)=f(1)$ 。因为 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是增函数， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上是增函数，所以 $f(-1)<f(0)<f(1)$ ，即 $f(-25)<f(80)<f(11)$ ，故选 D。

答案：D

——方法·规律——

函数性质综合应用问题的解题策略

(1)函数单调性与奇偶性结合。注意函数单调性及奇偶性的定义，以及奇、偶函数图象的对称性。

(2)周期性与奇偶性结合。此类问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行交换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解。

(3)周期性、奇偶性与单调性结合。解决此类问题通常先利用周期性转化自变量所在的区间，然后利用奇偶性和单调性求解。

第四节 函数的图象

考纲要求：1.会结合函数性质判断函数图象。

2. 会运用函数图象理解和研究函数的性质。

■ 课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 利用描点法作函数图象

基本步骤：列表、描点、连线。

首先：①确定函数的定义域；②化简函数解析式；③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性、对称性等)。

其次：列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点等)，描点，

连线.

易误提醒 (1)在使用描点法作图象时易忽视定义域及图象的一些特殊点(与 x 、 y 轴交点、最高、最低点等).

(2)连线时必须区分是光滑的曲线还是直线,易出错.

知识点二 函数的图象变换

1. 平移变换

$$y=f(x) \xrightarrow[a<0, \text{左移}|a|\text{个单位}]{a>0, \text{右移 } a \text{ 个单位}} y=f(x-a); \quad y=f(x) \xrightarrow[b<0, \text{下移 } b \text{ 个单位}]{b>0, \text{上移 } b \text{ 个单位}} y=f(x)+b.$$

2. 伸缩变换

$$y=f(x) \xrightarrow[\omega>1, \text{纵坐标不变,横坐标缩短为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}]{0<\omega<1, \text{纵坐标不变,横坐标伸长为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}}$$

$$y=$$

$$y=f(x) \xrightarrow[0<A<1, \text{纵坐标不变,纵坐标缩短为原来的 } A \text{ 倍}]{A>1, \text{纵坐标不变,纵坐标伸长为原来的 } A \text{ 倍}}$$

$$y=$$

3. 对称变换

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}} y=-f(x);$$

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}} y=f(-x);$$

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x).$$

4. 翻折变换

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{将 } y \text{ 轴右边的图象翻折到左边去}]{\text{去掉 } y \text{ 轴左边图, 保留 } y \text{ 轴右边图}} y=f(|x|);$$

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{将 } x \text{ 轴下方的图象翻折到上方去}]{\text{保留 } x \text{ 轴上方图}} y=|f(x)|.$$

易误提醒 (1)在解决函数图象的变换问题时,要遵循“只能对函数关系式中的 x 、 y 变换”的原则,写出每一次的变换所得图象对应的解析式,这样才能避免出错.

(2)明确一个函数的图象关于 y 轴对称与两个函数的图象关于 y 轴对称的不同,前者是自身对称,且为偶函数,后者是两个不同函数的对称关系.

课堂·考点突破

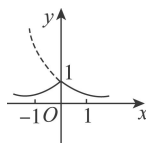
攻重点 破难点

考点一作函数的图象

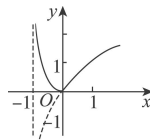
【例 1】作出下列函数的图象:

$$(1)y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}; \quad (2)y=|\log_2(x+1)|; \quad (3)y=\frac{2x-1}{x-1}; \quad (4)y=x^2-2|x|-1.$$

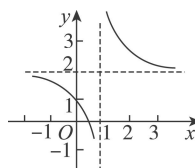
解：(1)作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 的图象，再将 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 的图象以 y 轴为对称轴翻折到 y 轴的左侧，即得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象，如图实线部分.



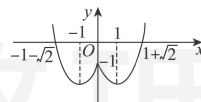
(2)将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移 1 个单位，再将 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折上去，即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象，如图.



(3) $\because y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$, 故函数图象可由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位而得，如图.



(4) $\because y=\begin{cases} x^2-2x-1, & x \geq 0, \\ x^2+2x-1, & x < 0 \end{cases}$ 且函数为偶函数，先用描点法作出 $[0, +\infty)$ 上的图象，再根据对称性作出 $(-\infty, 0)$ 上的图象，即得函数图象如图.



——方法·规律——

画函数图象的两种常用方法

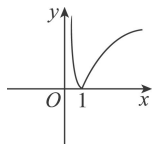
(1)直接法：当函数表达式(或变形后的表达式)是熟悉的基本初等函数时，就可根据这些函数的特征直接作出.

(2)图象变换法：若函数图象可由某个基本初等函数的图象经过平移、翻折、对称得到，可利用图象变换作出，但要注意变换顺序.

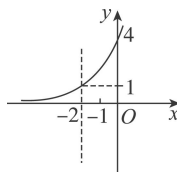
【变式训练 1】分别画出下列函数的图象：

$$(1)y=|\lg x|; \quad (2)y=2^{x+2}; \quad (3)y=\frac{x+2}{x+3}; \quad (4)y=|\log_2 x - 1|.$$

解：(1) $\because y=|\lg x|=\begin{cases} \lg x, & x \geq 1, \\ -\lg x, & 0 < x < 1. \end{cases} \therefore$ 函数 $y=|\lg x|$ 的图象如图(1).



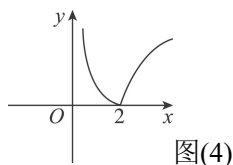
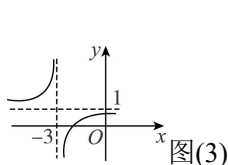
图(1)



图(2)

(2)将函数 $y=2^x$ 的图象向左平移 2 个单位即可得到函数 $y=2^{x+2}$ 的图象，如图(2).

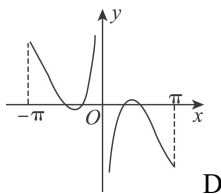
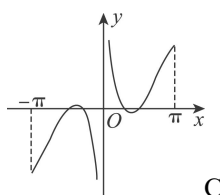
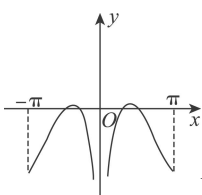
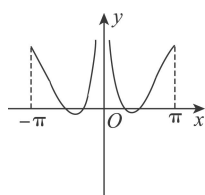
(3) $\because y=\frac{x+2}{x+3}=1-\frac{1}{x+3}$, 则原函数图象可由 $y=-\frac{1}{x}$ 图象向左平移 3 个单位，再向上平移 1 个单位得到，如图(3).



(4)先作出 $y = \log_2 x$ 的图象，再将其图象向下平移 1 个单位，保留 x 轴上方的部分，将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方，即得 $y = |\log_2 x - 1|$ 的图象，如图(4).

考点二识图与辨图

【例 2】(1)函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为()



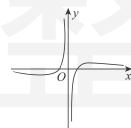
(2)(2017·贵州七校联考)已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以是()

A. $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$

B. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

C. $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

D. $f(x) = x - \frac{1}{x}$



解析：(1)根据 $y_1 = x - \frac{1}{x}$ 为奇函数， $y_2 = \cos x$ 为偶函数，可得函数 $f(x)$ 为奇函数，因此排除 A、B 项，又当 $x = \pi$ 时， $y_1 > 0$ ， $y_2 < 0$ ，故选 D.

(2)由图象知 $f(x)$ 应为奇函数，故排除 B、C，又当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 单调递增，排除 D，故选 A.

答案：(1)D (2)A

——方法·规律——

识图常用的三种方法

- (1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题.
- (2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题.
- (3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

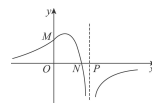
【变式训练 2】(1) 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是()

A. $a > 0, b > 0, c < 0$

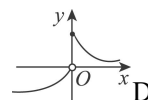
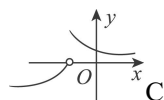
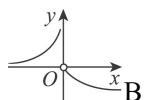
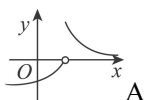
B. $a < 0, b > 0, c > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0$

D. $a < 0, b < 0, c < 0$



(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 1, \end{cases}$ 则函数 $y = f(1-x)$ 的大致图象是()



解析：(1) 函数定义域为 $\{x|x \neq -c\}$ ，结合图象知 $-c > 0$ ， $\therefore c < 0$ 。令 $x = 0$ ，

得 $f(0) = \frac{b}{c^2}$ ，又由图象知 $f(0) > 0$ ， $\therefore b > 0$ 。令 $f(x) = 0$ ，得 $x = -\frac{b}{a}$ ，

结合图象知 $-\frac{b}{a} > 0$ ， $\therefore a < 0$ ，故选 C。

(2) 当 $x = 0$ 时， $y = f(1) = 3$ ，即 $y = f(1-x)$ 的图象过点 $(0, 3)$ ，排除 A；当 $x = -2$ 时， y

$= f(3) = -1$ ，即 $y = f(1-x)$ 的图象过点 $(-2, -1)$ ，排除 B；当 $x = -\frac{1}{3}$ 时， $y = f\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3}$

< 0 ，即 $y = f(1-x)$ 的图象过点 $\left(-\frac{1}{3}, \log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3}\right)$ ，排除 C，故选 D。

答案：(1) C (2) D

考点三函数图象的应用

角度一 研究函数的性质

【例 3-1】已知函数 $f(x) = x|x| - 2x$ ，则下列结论正确的是()

A. $f(x)$ 是偶函数，递增区间是 $(0, +\infty)$

B. $f(x)$ 是偶函数，递减区间是 $(-\infty, 1)$

C. $f(x)$ 是奇函数，递减区间是 $(-1, 1)$

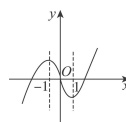
D. $f(x)$ 是奇函数，递增区间是 $(-\infty, 0)$

解析：将函数 $f(x) = x|x| - 2x$ 去掉绝对值得

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x, & x < 0, \end{cases}$$

画出函数 $f(x)$ 的图象，如图，观察图象可知，函

数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(-1, 1)$ 上单调



递减，故选 C。

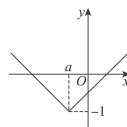
答案：C

角度二 求参数的值或取值范围

【例 3-2】在平面直角坐标系 xOy 中，若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |x-a| - 1$ 的图象只有一个

交点，则 a 的值为_____.

解析：函数 $y=|x-a|-1$ 的图象如图所示，因为直线 $y=2a$ 与函数 $y=|x-a|-1$ 的图象只有一个交点，故 $2a=-1$ ，解得 $a=-\frac{1}{2}$. 答案： $-\frac{1}{2}$



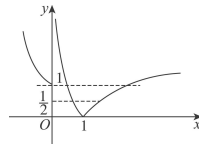
角度三 确定函数零点的个数

【例 3-3】已知 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x > 0, \\ 2^{|x|}, & x \leq 0. \end{cases}$ 则函数 $y=2f^2(x)-3f(x)+1$ 的零点个数是_____.

解析：方程 $2f^2(x)-3f(x)+1=0$ 的解为 $f(x)=\frac{1}{2}$ 或 1. 作出 $y=f(x)$ 的图

象，由图象知零点的个数为 5.

答案：5



角度四 求不等式的解集

【例 3-4】如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB ，则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是()

A. $\{x|-1 < x \leq 0\}$

B. $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$

C. $\{x|-1 < x \leq 1\}$

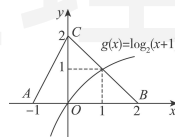
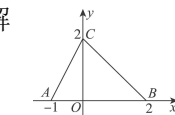
D. $\{x|-1 < x \leq 2\}$

解析：令 $g(x)=y=\log_2(x+1)$ ，作出函数 $g(x)$ 图象如图. 由 $\begin{cases} x+y=2, \\ y=\log_2(x+1), \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

$\therefore$ 结合图象知不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集为 $\{x|-1 < x \leq 1\}$ ，故选 C.

答案：C.

——方法·规律——



函数图象应用的常见题型与求解策略

1. 研究函数性质：

(1) 根据已知或作出的函数图象，从最高点、最低点，分析函数的最值、极值.

(2) 从图象的对称性，分析函数的奇偶性.

(3) 从图象的走向趋势，分析函数的单调性、周期性.

(4) 从图象与 x 轴的交点情况，分析函数的零点等.

2. 研究方程根的个数或由方程根的个数确定参数的值(范围)：构造函数，转化为两函数图象的交点个数问题，在同一坐标系中分别作出两函数的图象，数形结合求解.

3. 研究不等式的解：当不等式问题不能用代数法求解，但其对应函数的图象可作出时，常将不等式问题转化为两函数图象的上、下关系问题，从而利用数形结合求解.

【变式训练 3】(1) 已知函数 $y=\frac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx$ 的图象恰有两个交点，则实数 k

的取值范围是_____.

(2)设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x+1)=f(x-1)$, 已知当

$x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$, 则

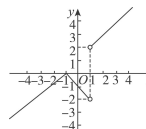
①2 是函数 $f(x)$ 的周期; ②函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上递减, 在 $(2, 3)$ 上递增;

③函数 $f(x)$ 的最大值是 1, 最小值是 0; ④当 $x \in (3, 4)$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$.

其中所有正确命题的序号是_____.

解析: (1)将函数 $y = \frac{|x^2-1|}{x-1}$ 化成分段函数, 并作出其图象如图所示. 利

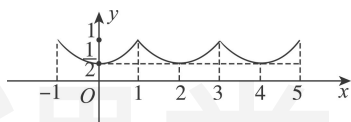
用图象可得实数 k 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, 2)$.



(2)由已知条件: $f(x+2)=f(x)$, 则 $y=f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, ①正确;

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $0 \leq -x \leq 1$, $f(x)=f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}$,

函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示:



当 $3 < x < 4$ 时, $-1 < x-4 < 0$, $f(x)=f(x-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, 因此②④正确, ③不正确.

答案: (1) $(0, 1) \cup (1, 2)$ (2)①②④

第五节 二次函数与幂函数

考纲要求: 1.掌握二次函数的图象与性质, 会求二次函数的最值(值域)、单调区间.

2. 了解幂函数的概念.

3. 结合函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象, 了解它们的变化情况.

课前·双基落实

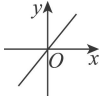
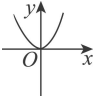
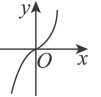
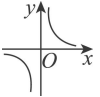
夯基点 扫盲点

知识点一 幂函数的定义

形如 $y=x^a(a \in \mathbf{R})$ 的函数称为幂函数, 其中 x 是自变量, a 为常数.

知识点二 五种常见幂函数的图象与性质

函数 特征 性质	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$

图象					
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x x \geq 0\}$	$\{x x \neq 0\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\{y y \geq 0\}$	$\mathbf{R}$	$\{y y \geq 0\}$	$\{y y \neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	$(-\infty, 0)$ 减, $(0, +\infty)$ 增	增	增	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 减
公共点	$(1, 1)$				

知识点三 二次函数

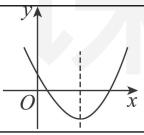
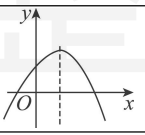
1. 二次函数解析式的三种形式

(1)一般式: $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$;

(2)顶点式: $f(x)=a(x-m)^2+n(a \neq 0)$;

(3)零点式: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a \neq 0)$.

2. 二次函数的图象和性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$	$\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	在 $\left[-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上递减, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上递增	在 $\left[-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上递增, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上递减
奇偶性	$b=0$ 时为偶函数, $b \neq 0$ 时为非奇非偶函数	
图象特点	①对称轴: $x=-\frac{b}{2a}$; ②顶点: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	

易误提醒 研究函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的性质, 易忽视 a 的取值情况而盲目认为 $f(x)$ 为二次函数.

必记结论 1.函数 $y=f(x)$ 对称轴的判断方法

(1)对于二次函数 $y=f(x)$, 如果定义域内有不同两点 x_1, x_2 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 那么函数 $y=$

$f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称.

(2)二次函数 $y=f(x)$ 对定义域内所有 x , 都有 $f(a+x)=f(a-x)$ 成立的充要条件是函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称(a 为常数).

2. 与二次函数有关的不等式恒成立两个条件

(1) $ax^2+bx+c>0, a\neq 0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

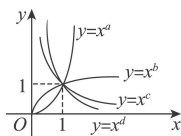
(2) $ax^2+bx+c<0, a\neq 0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a<0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一 幂函数的图象与性质

【例 1】



(1)若四个幂函数 $y=x^a, y=x^b, y=x^c, y=x^d$ 在同一坐标系中的图象如图所示, 则 a, b, c, d 的大小关系是()

A. $d>c>b>a$

B. $a>b>c>d$

C. $d>c>a>b$

D. $a>b>d>c$

(2)已知幂函数 $f(x)=(n^2+2n-2)x^{n^2-3n}(n\in\mathbf{Z})$ 的图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 n 的值为()

A. -3

B. 1

C. 2

D. 1 或 2

解析: (1)幂函数 $a=2, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}, d=-1$ 的图象, 正好和题目所给的形式相符合,

在第一象限内, $x=1$ 的右侧部分的图象, 图象由下至上, 幂指数增大, 所以 $a>b>c>d$, 故选 B.

(1) 由于 $f(x)$ 为幂函数, 所以 $n^2+2n-2=1$,

解得 $n=1$ 或 $n=-3$, 经检验只有 $n=1$ 适合题意, 故选 B.

答案: (1)B (2)B

——方法·规律——

幂函数图象与性质应用的三个关注点

(1)若幂函数 $y=x^a(a\in\mathbf{R})$ 是偶函数, 则 a 必为偶数. 当 a 是分数时, 一般将其先化为根式, 再判断.

(2)若幂函数 $y=x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a>0$, 若在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $a<0$.

(3)在比较幂值的大小时, 必须结合幂值的特点, 选择适当的函数, 借助其单调性进行比较.

【变式训练 1】若 $(a+1)-\frac{1}{3}<(3-2a)-\frac{1}{3}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析: 不等式 $(a+1)-\frac{1}{3}<(3-2a)-\frac{1}{3}$ 等价于 $a+1>3-2a>0$ 或 $3-2a<a+1<0$ 或 $a+1<0<3-2a$. 解得 $a<-1$ 或 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$.

答案: $(-\infty, -1) \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$

考点二求二次函数的解析式

【例 2】(1)已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$, $f(-1)=-1$, 且 $f(x)$ 的最大值是 8, 则此二次函数的解析式为_____.

(2)已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1, 3)$. 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为_____.

解析: (1)方法一(利用一般式)

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

$$\text{由题意得} \begin{cases} 4a+2b+c=-1, \\ a-b+c=-1, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=8, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-4, \\ b=4, \\ c=7. \end{cases} \quad \text{所以所求二次函数为 } f(x)=-4x^2+4x+7.$$

方法二(利用顶点式):

设 $f(x)=a(x-m)^2+n$. 因为 $f(2)=f(-1)$, 所以抛物线的对称轴为 $x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$.

所以 $m=\frac{1}{2}$. 又根据题意函数有最大值 8, 所以 $n=8$. 所以 $y=f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$.

因为 $f(2)=-1$, 所以 $a\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+8=-1$, 解得 $a=-4$,

所以 $f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$.

方法三(利用零点式):

由已知 $f(x)+1=0$ 两根为 $x_1=2$, $x_2=-1$, 故可设 $f(x)+1=a(x-2)(x+1)$,

即 $f(x)=ax^2-ax-2a-1$. 又函数有最大值 $y_{\max}=8$, 即 $\frac{4a(-2a-1)-a^2}{4a}=8$,

解得 $a=-4$. 所以所求函数的解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

(2) 因为 $f(x)+2x>0$ 的解集为 $(1, 3)$, 设 $f(x)+2x=a(x-1)(x-3)$, 且 $a<0$,

所以 $f(x)=a(x-1)(x-3)-2x=ax^2-(2+4a)x+3a$. ① 由方程 $f(x)+6a=0$

得 $ax^2-(2+4a)x+9a=0$. ② 因为方程②有两个相等的根,

所以 $\Delta=[-(2+4a)]^2-4a\cdot 9a=0$, 解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{5}$. 由于 $a<0$, 舍去 $a=1$.

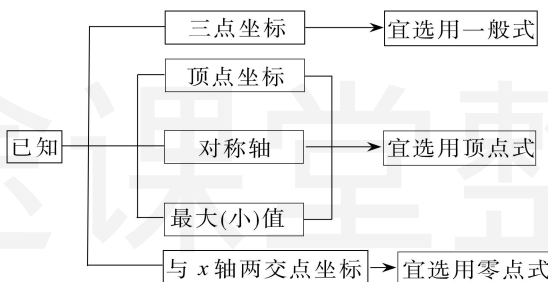
将 $a=-\frac{1}{5}$ 代入①式得 $f(x)=-\frac{1}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}(x+3)^2+\frac{6}{5}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -3]$.

答案: (1) $f(x)=-4x^2+4x+7$ (2) $(-\infty, -3]$

——方法·规律——

求二次函数解析式的方法



【变式训练 2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a, b\in\mathbf{R})$, $x\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=0$, 则 $f(x)=$ _____.

解析: 由题意知 $\begin{cases} f(-1)=a-b+1=0, \\ -\frac{b}{2a}=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases}$ 所以 $f(x)=x^2+2x+1$.

答案: x^2+2x+1

考点三二次函数的图象与性质

角度一 二次函数的单调性问题

【例 3-1】已知函数 $f(x)=x^2+2ax+3$, $x\in[-4, 6]$.

(1) 求实数 a 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-4, 6]$ 上是单调函数;

(2) 当 $a=1$ 时, 求 $f(|x|)$ 的单调区间.

解: (1) 由于函数 $f(x)$ 的图象开口向上, 对称轴是 $x=-a$,

所以要使 $f(x)$ 在 $[-4, 6]$ 上是单调函数, 应有 $-a\leq-4$ 或 $-a\geq 6$, 即 $a\leq-6$ 或 $a\geq 4$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -6] \cup [4, +\infty)$.

(2) 当 $a=1$ 时, $f(x)=x^2+2x+3$, $\therefore f(|x|)=x^2+2|x|+3$, 此时定义域为 $x \in [-6, 6]$,

$$\text{且 } f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3, & x \in (0, 6], \\ x^2-2x+3, & x \in [-6, 0], \end{cases}$$

$\therefore f(|x|)$ 的单调递增区间是 $(0, 6]$, 单调递减区间是 $[-6, 0]$.

角度二 二次函数的最值问题

【例 3-2】已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $x \in [0, 1]$ 时有最大值 2, 求 a 的值.

解: 函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a=-(x-a)^2+a^2-a+1$, 对称轴方程为 $x=a$.

当 $a < 0$ 时, $f(x)_{\max}=f(0)=1-a$, $\therefore 1-a=2$, $\therefore a=-1$.

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x)_{\max}=f(a)=a^2-a+1$, $\therefore a^2-a+1=2$, 即 $a^2-a-1=0$,

$\therefore a=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (舍去). 当 $a > 1$ 时, $f(x)_{\max}=f(1)=a$, $\therefore a=2$. 综上可知, $a=-1$ 或 $a=2$.

角度三 二次函数中恒成立问题

【例 3-3】已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒小于零, 求实数 a 的取值范围.

解: 由题意知 $2ax^2+2x-3 < 0$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立. 当 $x=0$ 时, $-3 < 0$, 适合;

当 $x \neq 0$ 时, $a < \frac{3}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right]^2 - \frac{1}{6}$, 因为 $\frac{1}{x} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,

当 $x=1$ 时, 右边取最小值 $\frac{1}{2}$, 所以 $a < \frac{1}{2}$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

——方法·规律——

1. 二次函数最值问题的类型及解题思路

(1) 类型: ①对称轴、区间都是给定的; ②对称轴动、区间固定; ③对称轴定、区间变动.

(2) 思路: 抓住“三点一轴”, 三点是指区间两个端点和中点, 一轴指的是对称轴.

2. 由不等式恒成立求参数取值范围的思路及关键

(1) 两个思路: 一是分离参数; 二是不分离参数.

(2) 一个关键: 两种思路都是将问题归结为求函数的最值, 至于用哪种方法, 关键是看参数是否已分离. 这两个思路的依据是: $a \geq f(x) \Leftrightarrow a \geq f(x)_{\max}$, $a \leq f(x) \Leftrightarrow a \leq f(x)_{\min}$.

【变式训练 3】(1) 已知函数 $y=-x^2+ax-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 2, 实数 a 的值为 _____.

(2) 设函数 $f(x) = ax^2 - 2x + 2$ ，对于满足 $1 < x < 4$ 的一切 x 值都有 $f(x) > 0$ ，则实数 a 的取值范围为_____.

解析：(1) $y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(a^2 - a + 2)$ ，对称轴为 $x = \frac{a}{2}$.

① 当 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$ 即 $0 \leq a \leq 2$ 时， $y_{\max} = \frac{1}{4}(a^2 - a + 2)$ ，由 $\frac{1}{4}(a^2 - a + 2) = 2$ ，

得 $a = 3$ 或 $a = -2$ ，与 $0 \leq a \leq 2$ 矛盾，舍去；

② 当 $\frac{a}{2} < 0$ 即 $a < 0$ 时， y 在 $[0, 1]$ 上单调递减，有 $y_{\max} = f(0)$ ，由 $f(0) = 2 \Rightarrow -\frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 2$

解得 $a = -6$.

③ 当 $\frac{a}{2} > 1$ 即 $a > 2$ 时， y 在 $[0, 1]$ 上单调递增，有 $y_{\max} = f(1)$ ，

由 $f(1) = 2$ 得 $-1 + a - \frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 2$ ，解得 $a = \frac{10}{3}$. 综上，得 $a = -6$ 或 $a = \frac{10}{3}$.

(2) 方法一：当 $a > 0$ 时， $f(x) = a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 - \frac{1}{a}$ ，由 $f(x) > 0$ ， $x \in (1, 4)$ 得：

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \leq 1, \\ a \end{cases}$$

$$f(1) = a - 2 + 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 1 < \frac{1}{a} < 4, \\ a \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} \frac{1}{a} \geq 4, \\ a \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1}{4} < a < 1 \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \leq \frac{1}{4}, \\ a \geq \frac{3}{8} \end{cases}$$

所以 $a \geq 1$ 或 $\frac{1}{2} < a < 1$ 或 $\emptyset$ ，即 $a > \frac{1}{2}$ ，当 $a < 0$ 时， $\begin{cases} f(1) = a - 2 + 2 \geq 0, \\ f(4) = 16a - 8 + 2 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $a \in \emptyset$ ；

当 $a = 0$ 时， $f(x) = -2x + 2$ ， $f(1) = 0$ ， $f(4) = -6$ ，

所以不合题意。综上可得，实数 a 的取值范围是 $a > \frac{1}{2}$.

方法二：由 $f(x) > 0$ ，

即 $ax^2 - 2x + 2 > 0$ ， $x \in (1, 4)$ ，得 $a > -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立.

令 $g(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ ，所以 $g(x)_{\max} = g(2) = \frac{1}{2}$ ，

所以要使 $f(x) > 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立，只要 $a > \frac{1}{2}$ 即可.

答案：(1) -6 或 $\frac{10}{3}$ (2) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

第六节 指数与指数函数

考纲要求：1.了解指数函数模型的实际背景.

2.理解有理数指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

3.理解指数函数的概念，理解指数函数的单调性，掌握指数函数图象通过的特殊点.

4.知道指数函数是一类重要的函数模型.

■ 课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 根式与幂的运算

1. 根式的性质

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(2) \text{当 } n \text{ 为奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a.$$

$$(3) \text{当 } n \text{ 为偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$

(4) 负数的偶次方根无意义.

(5) 零的任何次方根都等于零.

2. 有理指数幂

(1) 分数指数幂

$$\textcircled{1} \text{正分数指数幂: } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n > 1).$$

$$\textcircled{2} \text{负分数指数幂: } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } n > 1).$$

$\textcircled{3}$ 0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

(2) 有理数指数幂的运算性质

$$\textcircled{1} a^r \cdot a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q}).$$

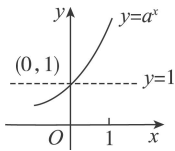
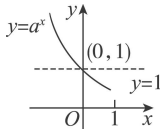
$$\textcircled{2} (a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q}).$$

$$\textcircled{3} (ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q}).$$

易误提醒 在进行指数幂的运算时，一般用分数指数幂的形式表示，并且结果不能同时含有根号和分数指数幂，也不能既有分母又含有负指数。易忽视字母的符号。

知识点二 指数函数的图象与性质

$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
-----------	---------	-------------

图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0, +\infty)$	
性质	过定点 $(0, 1)$	
	当 $x > 0$ 时, $y > 1$; $x < 0$ 时, $0 < y < 1$	(2) 当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$; $x < 0$ 时, $y > 1$
	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

易误提醒 指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的图象和性质与 a 的取值有关, 要特别注意区分 $a>1$ 或 $0<a<1$.

必记结论 (1)指数函数图象的三个关键点:

画指数函数图象时应抓住图象上的三个关键点: $(1, a), (0, 1), \left[-1, \frac{1}{a}\right]$.

(2)底数 a 与 1 的大小关系决定了指数函数图象的“升降”; 当 $a>1$ 时, 指数函数的图象“上升”; 当 $0<a<1$ 时, 指数函数的图象“下降”.

(3)底数的大小决定了图象相对位置的高低: 不论是 $a>1$, 还是 $0<a<1$, 在第一象限内底数越大, 函数图象越高.

(4)指数函数的图象向左(或向右)平移不会与 x 轴有交点, 向上(或向下)平移 a 个单位后, 图象都在直线 $y=a$ (或 $y=-a$) 的上方.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一指数幂的化简与求值

【例 1】(1)化简: $\frac{\sqrt{a^3b^2}\sqrt[3]{ab^2}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}(a>0, b>0)=$ _____.

(2)计算: $\left[-\frac{27}{8}\right]^{-\frac{2}{3}}+(0.002)^{-\frac{1}{2}}-10(\sqrt{5}-2)^{-1}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0$.

解析: (1)原式 $=\frac{(a^3b^2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{ab^2a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}-1+\frac{1}{3}}b^{1+\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3}}=ab^{-1}$.

$$(2) \text{原式} = \left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{10}{\sqrt{5}-2} + 1 = \left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} + 500^{\frac{1}{2}} - 10(\sqrt{5}+2) + 1$$

$$= \frac{4}{9} + 10\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 20 + 1 = -\frac{167}{9}.$$

答案：(1) ab^{-1} (2) $-\frac{167}{9}$

——方法·规律——

指数幂的运算规律

- (1)有括号的先算括号里的，无括号的先算指数运算.
- (2)先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数.
- (3)底数是负数，先确定符号，底数是小数，先化成分数，底数是带分数的，先化成假分数.
- (4)若是根式，应化为分数指数幂，尽可能用幂的形式表示，运用指数幂的运算性质来解答.

【变式训练 1】若 $x > 0$ ，则 $(2x^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{3}{2}})(2x^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{3}{2}}) - 4x - \frac{1}{2}(x - x^2) =$ _____.

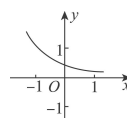
解析：原式 $= (2x^{\frac{1}{4}})^2 - (3^{\frac{3}{2}})^2 - 4x - \frac{1}{2} + 4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4x^{\frac{1}{2}} - 3^3 - 4x^{\frac{1}{2}} + 4 = -23$.

答案：-23

考点二指数函数的图象及应用

【例 2】(1)函数 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象如图，其中 a, b 为常数，则下列结论正确的是()

- A. $a > 1, b < 0$ B. $a > 1, b > 0$
C. $0 < a < 1, b > 0$ D. $0 < a < 1, b < 0$

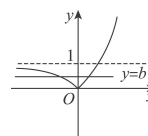


(2)若曲线 $y = |2^x - 1|$ 与直线 $y = b$ 有两个公共点，则 b 的取值范围为_____.

解析：(1)由 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象可以观察出，函数 $f(x) = a^{x-b}$ 在定义域上单调递减，所以 $0 < a < 1$ ，函数 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象是在 $y = a^x$ 的基础上向左平移得到的，所以 $b < 0$ ，故选 D.

(2)曲线 $y = |2^x - 1|$ 与直线 $y = b$ 的图象如图所示，由图象可得，如果曲线 $y = |2^x - 1|$ 与直线 $y = b$ 有两个公共点，则 b 的取值范围是 $(0, 1)$.

答案：(1)D (2) $(0, 1)$

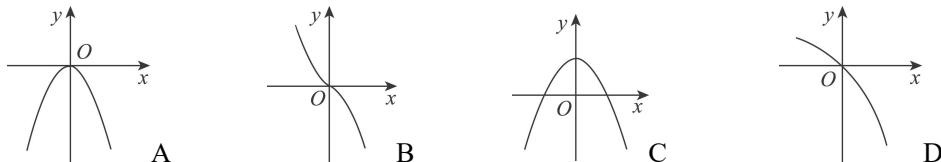


——方法·规律——

指数函数图象的画法及应用解题策略

1. 与指数函数有关的函数图象的研究，往往利用相应指数函数的图象，通过平移、对称、翻折变换得到其图象。
2. 一些指数方程、不等式问题的求解，往往利用相应的指数型函数图象数形结合求解。

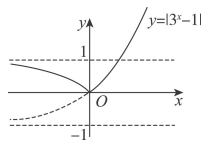
【变式训练 2】(1) 函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 的图象大致是()



(2) 若函数 $y = |3^x - 1|$ 在 $(-\infty, k]$ 上单调递减，则 k 的取值范围为_____.

解析：(1) 将函数解析式与图象对比分析，因为函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 是偶函数，且值域是 $(-\infty, 0]$ 只有 A 满足上述两个性质，故选 A.

(2) 函数 $y = |3^x - 1|$ 的图象是由函数 $y = 3^x$ 的图象向下平移一个单位后，再把位于 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方得到的，函数图象如图示。



由图象知，其在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，所以 k 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

答案：(1) A (2) $(-\infty, 0]$

考点三指数函数的性质及应用

角度一 比较指数式的大小

【例 3-1】已知 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是()

- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

解析：因为 $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < 0$ ，所以 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}} > \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$ ，

即 $a > b > 1$ ，且 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} < \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ，所以 $c < 1$ ，综上， $c < b < a$ ，故选 D.

答案：D

角度二 解简单的指数不等式

【例 3-2】不等式 $2x^2 - x < 4$ 的解集为_____.

解析： $\because 2x^2 - x < 4, \therefore 2x^2 - x < 2^2, \therefore x^2 - x < 2$ ，即 $x^2 - x - 2 < 0, \therefore -1 < x < 2$.

答案： $\{x | -1 < x < 2\}$ (或 $(-1, 2)$)

角度三 研究指数型函数的性质

【例 3-3】已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2-4x+3}$.

(1) 若 $a = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有最大值 3, 求 a 的值;

(3) 若 $f(x)$ 的值域是 $(0, +\infty)$, 求 a 的值.

解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-4x+3}$. 令 $g(x) = -x^2 - 4x + 3$,

由于 $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减, 而 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 即函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-2, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -2)$.

(2) 令 $g(x) = ax^2 - 4x + 3$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$.

由于 $f(x)$ 有最大值 3, 所以 $g(x)$ 应有最小值 -1 , 因此必有 $\begin{cases} a > 0, \\ \frac{3a-4}{a} = -1, \end{cases}$

解得 $a = 1$, 即当 $f(x)$ 有最大值 3 时, a 的值等于 1.

(3) 由指数函数的性质知, 要使 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$ 的值域为 $(0, +\infty)$,

应使 $g(x) = ax^2 - 4x + 3$ 的值域为 $\mathbf{R}$,

因此只能 $a = 0$. (因为若 $a \neq 0$, 则 $g(x)$ 为二次函数, 其值域不可能为 $\mathbf{R}$).

故 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$ 时, a 的值为 0.

——方法·规律——

指数函数性质的常见题型及求解策略

题型	求解策略
比较幂值的大小	(1) 能化成同底数的先化成同底数幂再利用单调性比较大小; (2) 不能化成同底数的, 一般引入“1”等中间量比较大小
解简单指数不等式	先利用幂的运算性质化为同底数幂, 再利用单调性转化为一般不等式求解
探究指数型函数的性质	与研究一般函数的定义域、单调性(区间)、奇偶性、最值(值域)等性质的方法一致

[提醒] 在研究指数函数的单调性时, 当底数与“1”的大小关系不明确时, 要分类讨论.

【变式训练 3】(1) 已知 $a = 2^{\ln 3}$, $b = 2^{\ln 2}$, $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{32} 11}$, 则()

A. $c > a > b$ B. $a > b > c$ C. $a > c > b$ D. $b > c > a$

(2) 已知函数 $f(x) = 2^{2x-m}$ (m 为常数), 若 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则 m 的取值范围是_____.

解析: (1) 由于 $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log \frac{1}{3} 2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_3 2} = 2 - 2\log_3 2$,

又 $\ln 3 > 1$, $0 < \ln 2 < 1$, $-2\log_3 2 < 0$, $f(x) = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 所以 $a > b > c$, 故选

B.

(2) 令 $t = |2x - m|$,

则 $t = |2x - m|$ 在区间 $\left[\frac{m}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在区间 $\left(-\infty, \frac{m}{2}\right]$ 上单调递减, 而 $y = 2^t$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以要使函数 $f(x) = 2^{2x-m}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 则有 $\frac{m}{2} \leq 2$, 即 $m \leq 4$,

所以 m 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

答案: (1) B (2) $(-\infty, 4]$

第七节 对数与对数函数

考纲要求: 1. 理解对数的概念及其运算性质, 知道用换底公式, 能将一般对数转化成自然对数或常用对数, 了解对数在简化运算中的作用.

2. 理解对数函数的概念, 理解对数函数的单调性, 掌握对数函数图象通过的特殊点.

3. 知道对数函数是一类重要的函数模型.

4. 了解指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数 ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

课前提前·双基落实 夯基点 扫盲点

知识点一 对数及对数运算

1. 对数的定义

一般地, 如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫作以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$,

其中 a 叫作对数的底数, N 叫作真数.

2. 对数的性质

(1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

(2) $a \log_a N = N$, $\log_a a^N = N$.

(3) 负数和零没有对数.

3. 对数的运算性质

如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么

$$(1)\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

$$(2)\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.$$

$$(3)\log_a M^n=n\log_a M(n\in \mathbf{R}).$$

$$(4)\text{换底公式 } \log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}(a>0 \text{ 且 } a\neq 1, b>0, m>0, \text{ 且 } m\neq 1).$$

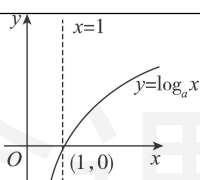
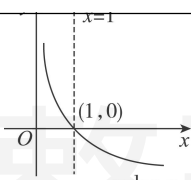
易误提醒 在运算性质 $\log_a M^n=n\log_a M$ 中，易忽视 $M>0$.

必记结论 1.指数式与对数式互化： $a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

2. 对数运算的一些结论：

$$\textcircled{1}\log_{am} b^n=\frac{n}{m}\log_a b. \textcircled{2}\log_a b \cdot \log_b a=1. \textcircled{3}\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d=\log_a d.$$

知识点二 对数函数的定义、图象与性质

定义	函数 $y=\log_a x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 叫做对数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
性质,	定义域： $(0, +\infty)$ 值域： $(-\infty, +\infty)$ 当 $x=1$ 时， $y=0$ ，即过定点 $(1, 0)$	
	当 $0<x<1$ 时， $y<0$ ；当 $x>1$ 时， $y>0$ ；在 $(0, +\infty)$ 上为增函数	当 $0<x<1$ 时， $y>0$ 当 $x>1$ 时， $y<0$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

易误提醒 解决与对数函数有关的问题时易漏两点：

(1)函数的定义域；(2)对数底数的取值范围.

必记结论 (1)底数的大小决定了图象相对位置的高低；不论是 $a>1$ 还是 $0<a<1$ ，在第一象限内，自左向右，图象对应的对数函数的底数逐渐变大.

(2)对数函数 $y=\log_a x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 的图象过定点 $(1, 0)$ ，且过点 $(a, 1), (\frac{1}{a}, -1)$ ，函数图象只在第一、四象限.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一对数式的化简与求值

【例 1】(1)若 $\log_a 2=m$ ， $\log_a 3=n$ ，则 $a^{2m+n}=\underline{\hspace{2cm}}$.

(2)计算： $(\log_3 2 + \log_9 2) \cdot (\log_4 3 + \log_8 3) =$ _____.

解析：(1)方法一：因为 $\log_a 2 = m$, $\log_a 3 = n$, 所以 $a^m = 2$, $a^n = 3$, 所以 $a^{2m+n} = (a^m)^2 \cdot a^n = 2^2 \times 3 = 12$.

方法二：因为 $\log_a 2 = m$, $\log_a 3 = n$, 所以 $a^{2m+n} = (a^m)^2 \cdot a^n = (a \log_a 2)^2 \cdot a \log_a 3 = 2^2 \times 3 = 12$.

$$(2) \text{原式} = \left(\frac{\lg 2}{\lg 3} + \frac{\lg 2}{\lg 9} \right) \cdot \left(\frac{\lg 3}{\lg 4} + \frac{\lg 3}{\lg 8} \right) = \left(\frac{\lg 2}{\lg 3} + \frac{\lg 2}{2\lg 3} \right) \cdot \left(\frac{\lg 3}{2\lg 2} + \frac{\lg 3}{3\lg 2} \right) = \frac{3\lg 2}{2\lg 3} \cdot \frac{5\lg 3}{6\lg 2} = \frac{5}{4}.$$

答案：(1)12 (2) $\frac{5}{4}$

——方法·规律——

对数运算的一般思路及解题策略

(1)首先利用幂的运算把底数或真数进行变形，化成分数指数幂的形式，使幂的底数最简，然后正用对数运算性质化简合并.

(2)将对数式化为同底数对数的和、差、倍数运算，然后逆用对数的运算性质，转化为同底对数真数的积、商、幂的运算.

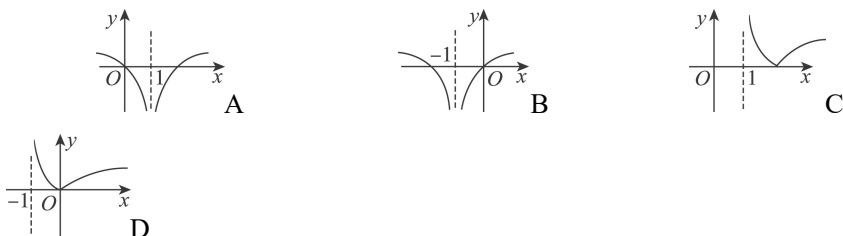
【变式训练 1】计算： $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} =$ _____, $2\log_2 3 + \log_4 3 =$ _____.

解析： $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $2\log_2 3 + \log_4 3 = 2\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{5}{2}\log_2 3 = 3\sqrt{3}$.

答案： $-\frac{1}{2}$ $3\sqrt{3}$

考点二对数函数的图象及应用

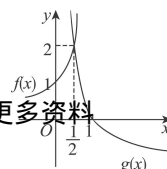
【例 2】(1)函数 $y = \lg|x-1|$ 的图象是()



(2)当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $4^x < \log_a x$, 则 a 的取值范围是()

A. $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

解析：(1)因为 $y = \lg|x-1| = \begin{cases} \lg(x-1), & x > 1, \\ \lg(1-x), & x < 1. \end{cases}$



当 $x=1$ 时，函数无意义，故排除 B、D.

又当 $x=2$ 或 0 时， $y=0$ ，所以 A 项符合题意，故选 A.

(2)方法一：构造函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_a x$ ，当 $a>1$ 时不满足条件，当 $0<a<1$ 时，

画出两个函数在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的图象，可知， $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$ ，即 $2<\log_a \frac{1}{2}$ ，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 a

的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ，故选 B.

方法二： $\because 0<x\leq\frac{1}{2}$ ， $\therefore 1<4^x\leq 2$ ， $\therefore \log_a x>4^x>1$ ，

$\therefore 0<a<1$ ，排除选项 C、D；取 $a=\frac{1}{2}$ ， $x=\frac{1}{2}$ ，

则有 $4^{\frac{1}{2}}=2$ ， $\log \frac{1}{2}=1$ ，显然 $4^x<\log_a x$ 不成立，排除选项 A，故选 B.

答案：(1)A (2)B

——方法·规律——

利用对数函数的图象可求解的两类问题

(1)对一些可通过平移、对称变换作出其图象的对数型函数，在求解其单调性(单调区间)、值域(最值)、零点时，常利用数形结合思想.

(2)一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图象问题，利用数形结合法求解.

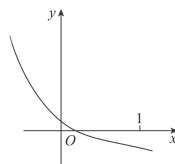
【变式训练 2】(1)已知函数 $y=\log_a(x+c)$ (a, c 为常数. 其中 $a>0, a\neq 1$) 的图象如图，则下列结论成立的是()

A. $a>1, c>1$

B. $a>1, 0<c<1$

C. $0<a<1, c>1$

D. $0<a<1, 0<c<1$



(2)已知函数 $f(x)=10^{-x}-|\lg x|$ 与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$ ， $(x_2, 0)$ ，则()

A. $0<x_1x_2<1$

B. $x_1x_2=1$

C. $-1<x_1x_2<0$

D. $1<x_1x_2<10$

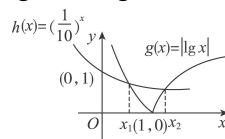
解析：(1)由图象单调递减的性质可得 $0<a<1$ ，图象向左平移小于 1 个单位，故 $0<c<1$ ，故选 D.

(2)令 $h(x)=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ， $g(x)=|\lg x|$ ，在平面直角坐标系中作出两函数的简图，由图可

知 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x_1} = -\lg x_1$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{x_2} = \lg x_2$, 两式相减得 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x_1} - \left(\frac{1}{10}\right)^{x_2} = -\lg x_1 - \lg x_2 = -\lg x_1 x_2$.

因为 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x_1} - \left(\frac{1}{10}\right)^{x_2} > 0$, 所以 $\lg x_1 x_2 < 0$, 即 $0 < x_1 x_2 < 1$, 故选 A.

答案: (1)D (2)A



考点三对数函数的性质及应用

角度一 求函数的定义域

【例 3-1】函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$ 的定义域为()

- A. (0, 2) B. (0, 2] C. (2, +∞) D. [2, +∞)

解析: 由题意, 得 $\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x - 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $x > 2$, 故选 C.

答案: C

角度二 比较对数值的大小

【例 3-2】已知 $a = 2 - \frac{1}{3}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log \frac{1}{3}$, 则()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $\frac{1}{2}c > a > b$ D. $c > b > a$

解析: 由于指数函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则 $0 < 2 - \frac{1}{3} < 2^0 = 1$;

而对数函数 $y = \log_2 x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则 $\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 1 = 0$;

对数函数 $y = \log x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

则 $\log \frac{1}{3} > \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 综上所述, $c > a > b$, 故选 C.

答案: $\frac{1}{2}$ C

角度三 解简单的对数不等式

【例 3-3】若 $f(x) = \lg x$, $g(x) = f(|x|)$, 则 $g(\lg x) > g(1)$ 时, x 的取值范围是_____.

解析: 当 $g(\lg x) > g(1)$ 时, $f(|\lg x|) > f(1)$, 由 $f(x)$ 为增函数得 $|\lg x| > 1$, 从而 $\lg x > 1$ 或 $\lg x < -1$, 解得 $0 < x < \frac{1}{10}$ 或 $x > 10$.

答案: $\left[0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$

角度四 对数函数的综合问题

【例 3-4】若 $f(x) = \lg(x^2 - 2ax + 1 + a)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上递减, 则 a 的取值范围为()

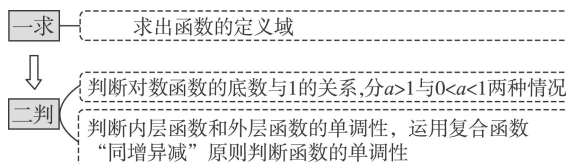
- A. [1, 2) B. [1, 2] C. [1, +∞) D. [2, +∞)

解析：令函数 $g(x)=x^2-2ax+1+a=(x-a)^2+1+a-a^2$ ，对称轴为 $x=a$ ，要使函数在 $(-\infty, 1]$ 上递减，则有 $\begin{cases} g'(1) > 0, \\ a \geq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2-a > 0, \\ a \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 \leq a < 2$ ，即 $a \in [1, 2)$ ，故选 A.

答案：A

——方法·规律——

解决与对数函数有关的函数的单调性问题的步骤



【变式训练 3】(1) 已知 $a=3^{\frac{1}{2}}$, $b=\log \frac{1}{2}$, $c=\log_2 \frac{1}{3}$, 则()

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

(2) 已知函数 $f(x)=\log_a|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则()

- A. $f(3) < f(-2) < f(1)$ B. $f(1) < f(-2) < f(3)$
C. $f(-2) < f(1) < f(3)$ D. $f(3) < f(1) < f(-2)$

解析：(1) $\because a=3^{\frac{1}{2}} > 1$, $0 < b=\log \frac{1}{2} = \log_3 2 < 1$,
 $c=\log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3 < 0$, $\therefore a > b > c$, 故选 A.

(2) 因为 $f(x)=\log_a|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $a > 1$, $f(1) < f(2) < f(3)$.

又函数 $f(x)=\log_a|x|$ 为偶函数，所以 $f(2)=f(-2)$ ，所以 $f(1) < f(-2) < f(3)$ ，故选 B.

答案：(1)A (2)B

第八节 函数与方程

考纲要求：1. 结合二次函数的图象，了解函数的零点与方程根的联系，判断一元二次方程根的存在性及根的个数.

2. 根据具体函数的图象，能够用二分法求相应方程的近似解.

■ 课前·双基落实 夯基点 扫盲点

知识点一 函数的零点

1. 函数的零点

(1) 定义

对于函数 $y=f(x)(x \in D)$ ，把使 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫作函数 $y=f(x)(x \in D)$ 的零点.

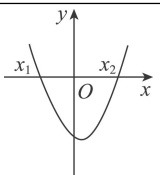
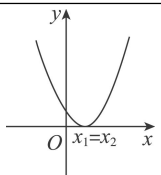
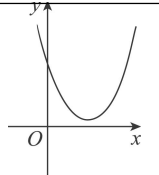
(2)函数的零点与相应方程的根、函数的图象与 x 轴交点间的关系.

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

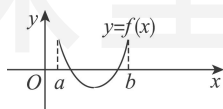
(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与零点的关系

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)			
与 x 轴的交点	$(x_1, 0), (x_2, 0)$	$(x_1, 0)$	无交点
零点个数	2	1	0

易误提醒 (1)函数 $y=f(x)$ 的零点即方程 $f(x)=0$ 的实根, 易误认为点. (2)由函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有零点不一定能推出 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 如图所示.



所以 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 是 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有零点的充分不必要条件.

必记结论 有关函数零点的结论

(1)若连续不断的函数 $f(x)$ 在定义域上是单调函数, 则 $f(x)$ 至多有一个零点.

(2)连续不断的函数, 其相邻两个零点之间的所有函数值保持同号.

(3)连续不断的函数图象通过零点时, 函数值可能变号, 也可能不变号.

知识点二 二分法

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y=f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫作二分法.

必记结论 用二分法求函数零点的方法

用二分法求零点近似值的口诀为: 定区间, 找中点, 中值计算两边看; 同号去, 异号算, 零点落在异号间; 周而复始怎么办? 精确度上来判断.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一判断函数零点所在区间

【例 1】(1) 已知函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是()

- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 4) D. (4, +∞)

(2) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x - \ln x$ ，则函数 $y = f(x)$ ()

- A. 在区间 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, (1, e) 内均有零点
 B. 在区间 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, (1, e) 内均无零点
 C. 在区间 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 内有零点，在区间 (1, e) 内无零点
 D. 在区间 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 内无零点，在区间 (1, e) 内有零点

解析：(1) 因为 $f(1) = 6 - \log_2 1 = 6 > 0$, $f(2) = 3 - \log_2 2 = 2 > 0$,

$f(3) = 2 - \log_2 3 > 0$, $f(4) = \frac{6}{4} - \log_2 4 = \frac{3}{2} - 2 < 0$ ，所以包含 $f(x)$ 的区间是 (2, 4)，故选 C.

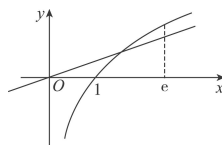
(2) 方法一：当 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ 时，函数图象是连续的，且 $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{3x} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递减. 又 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{3e} - \ln \frac{1}{e} > 0$, $f(1) = \frac{1}{3} > 0$,

$f(e) = \frac{1}{3}e - \ln e < 0$ ，所以函数有零点在区间 (1, e) 内，故选 D.

方法二：令 $f(x) = 0$ 得 $\frac{1}{3}x = \ln x$.

作出函数 $y = \frac{1}{3}x$ 和 $y = \ln x$ 的图象，



如图，显然 $y = f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 内无零点，

在 (1, e) 内有零点，故选 D.

答案：(1)C (2)D

——方法·规律——

确定函数 $f(x)$ 的零点所在区间的两种常用方法

(1) 利用函数零点的存在性定理：首先看函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是否连续，再看是否有 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 若有，则函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内必有零点.

(2) 数形结合法：通过画函数图象，观察图象与 x 轴在给定区间上是否有交点来判断.

【变式训练 1】若函数 $f(x)=ax+1$ 在区间 $(-1, 1)$ 上存在一个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 1)$

解析：由题意知 $f(-1)f(1)<0$ ，即 $(1-a)(1+a)<0$ ，解得 $a<-1$ 或 $a>1$ ，故选 C.

答案：C

考点二判断函数零点的个数

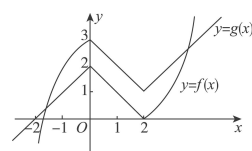
【例 2】(1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2-|x|, & x\leq 2, \\ (x-2)^2, & x>2, \end{cases}$ 函数 $g(x)=3-f(2-x)$ ，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -2, & x>0, \\ -x^2+bx+c, & x\leq 0, \end{cases}$ 若 $f(0)=-2$ ， $f(-1)=1$ ，则函数 $g(x)=f(x)+x$ 的零点个数为_____.

解析：(1) 由已知条件可得 $g(x)=3-f(2-x)=\begin{cases} x-2|+1, & x\geq 0, \\ 3-x^2, & x<0. \end{cases}$ 函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数即为函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 图象的交点个数，在平面直角坐标系内作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图所示.

由图可知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有 2 个交点，所以函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为 2，故选 A.



(2) 依题意得 $\begin{cases} c=-2, \\ -1-b+c=1, \end{cases}$ 由此解得 $b=-4$ ， $c=-2$.

由 $g(x)=0$ 得 $f(x)+x=0$ ，该方程等价于 $\begin{cases} x>0, \\ -2+x=0, \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x\leq 0, \\ -x^2-4x-2+x=0. \end{cases}$ ②

解①得 $x=2$ ，解②得 $x=-1$ 或 $x=-2$. 因此，函数 $g(x)=f(x)+x$ 的零点个数为 3.

答案：(1)A (2)3

——方法·规律——

判断函数零点个数的方法

(1) 解方程法：令 $f(x)=0$ ，如果能求出解，则有几个解就有几个零点.

(2) 零点存在性定理法：利用定理不仅要求函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$ ，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性、周期性、对称性)才能确定函数有多少个零点或零点值所具有的性质.

(3)数形结合法：转化为两个函数的图象的交点个数问题，先画出两个函数的图象，看其交点个数，其中交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点。

【变式训练 2】(1)函数 $f(x)=\log_2(x+4)-3^x$ 的零点有()

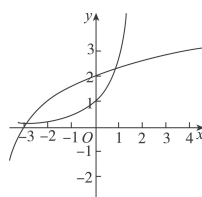
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(2)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x)=x^2-3x$ ，则函数 $g(x)=f(x)-x+3$ 的零点的集合为()

- A. $\{1, 3\}$ B. $\{-3, -1, 1, 3\}$
C. $\{2-\sqrt{7}, 1, 3\}$ D. $\{-2-\sqrt{7}, 1, 3\}$

解析：(1)在同一个坐标系中，画出函数 $y=3^x$ 与函数 $y=\log_2(x+4)$

的图象，则图象的交点个数就是函数 $f(x)=\log_2(x+4)-3^x$ 的零点的个数，由图象知，函数图象交点为 2 个，故函数的零点为 2 个，故



选 C.

(2)当 $x \geq 0$ 时，函数 $g(x)$ 的零点即方程 $f(x)=x-3$ 的根，由 $x^2-3x=x-3$ ，解得 $x=1$ 或 3 ；当 $x < 0$ 时，由 $f(x)$ 是奇函数得 $-f(x)=f(-x)=x^2-3(-x)$ ，即 $f(x)=-x^2-3x$ 。由 $f(x)=x-3$ 得 $x=-2-\sqrt{7}$ (正根舍去)，故选 D.

答案：(1)C (2)D

考点三函数零点的应用

【例 3】(1)设函数 $f(x)=e^x+x-2$ ， $g(x)=\ln x+x^2-3$ 。若实数 a, b 满足 $f(a)=0, g(b)=0$ ，则()

- A. $g(a) < 0 < f(b)$ B. $f(b) < 0 < g(a)$
C. $0 < g(a) < f(b)$ D. $f(b) < g(a) < 0$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+5x+4, & x \leq 0, \\ 2|x-2|, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-a|x|$ 恰有 4 个零点，则实数 a 的取值范围为_____。

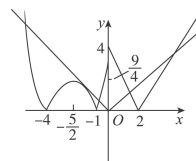
解析：(1) $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(0)=1-2 < 0, f(1)=e-1 > 0$ ，

又 $f(a)=0, \therefore 0 < a < 1$ 。 $\because g(x)=\ln x+x^2-3, \therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

又 $g(1)=\ln 1-2=-2 < 0, g(2)=\ln 2+1 > 0$ ，且 $g(b)=0$ ，

$\therefore 1 < b < 2$ ，即 $a < b, \therefore \begin{cases} f(b) > f(a) = 0, \\ g(a) < g(b) = 0, \end{cases}$ 故选 A.

(2)在同一平面直角坐标系内画出函数 $y=f(x)$ 和 $y=a|x|$ 的图象可知，若满足条件，则 $a > 0$ 。



当 $a \geq 2$ 时，在 y 轴右侧，两函数图象只有一个公共点，此时在 y 轴

左侧，射线 $y = -ax (x \leq 0)$ 与抛物线 $y = -x^2 - 5x - 4 (-4 < x < -1)$ 需相切。

$$\text{由 } \begin{cases} y = -x^2 - 5x - 4, \\ y = -ax \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 + (5-a)x + 4 = 0.$$

由 $\Delta = (5-a)^2 - 16 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 9$.

$a = 1$ 与 $a \geq 2$ 矛盾, $a = 9$ 时, 切点的横坐标为 2, 不符合. 故 $0 < a < 2$, 此时, 在 y 轴右侧, 两函数图象有两个公共点, 若满足条件, 则 $-a < -1$, 即 $a > 1$. 故 $1 < a < 2$.

答案: (1)A (2)(1, 2)

——方法·规律——

已知函数有零点(方程有根)求参数取值范围的三种常用的方法

(1)直接法: 直接根据题设条件构建关于参数的不等式, 再通过解不等式确定参数范围.

(2)分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数值域问题加以解决.

(3)数形结合法: 先对解析式变形, 在同一平面直角坐标系中, 画出函数的图象, 然后数形结合求解.

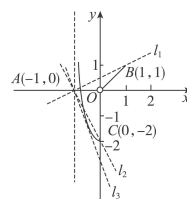
【变式训练 3】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & x \in (-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1], \end{cases}$ 且 $g(x) = f(x) - mx - m$ 在 $(-1, 1]$

内有且仅有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $\left[-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$
C. $\left[-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left[0, \frac{2}{3}\right]$ D. $\left[-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left[0, \frac{2}{3}\right]$

解析: $g(x) = 0$, 则 $f(x) = m(x+1)$, 故函数 $g(x)$ 在 $(-1, 1]$ 内有且仅有两个不同的零点等价于函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = m(x+1)$ 有且仅有两个不同的交点,

函数 $f(x)$ 的图象如图中实线所示, 易求 $k_{AB} = \frac{1}{2}$, $k_{AC} = -2$, 过 $A(-1,$



0)作曲线的切线, 不妨设切线方程为 $y = k(x+1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+1), \\ y = \frac{1}{x+1} - 3 \end{cases} \text{ 得 } kx^2 + (2k+3)x + 2+k = 0,$$

则 $\Delta = (2k+3)^2 - 4k(2+k) = 0$, 解之得 $k = -\frac{9}{4}$.

故实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 故选 A.

答案: A

第九节 函数模型及其应用

考纲要求：1.了解指数函数、对数函数、幂函数的增长特征，结合具体实例体会直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.

2.了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

■ 课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 几种常见的函数模型

1. 正比例函数模型： $f(x)=kx(k$ 为常数， $k\neq 0)$;
2. 反比例函数模型： $f(x)=\frac{k}{x}(k$ 为常数， $k\neq 0)$;
3. 一次函数模型： $f(x)=kx+b(k, b$ 为常数， $k\neq 0)$;
4. 二次函数模型： $f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c$ 为常数， $a\neq 0)$;
5. 指数函数模型： $f(x)=ab^x+c(a, b, c$ 为常数， $a\neq 0, b>0, b\neq 1)$;
6. 对数函数模型： $f(x)=m\log_ax+n(m, n, a$ 为常数， $m\neq 0, a>0, a\neq 1)$;
7. 幂函数模型： $f(x)=ax^n+b(a, b, n$ 为常数， $a\neq 0, n\neq 1)$;
8. “对勾”函数模型： $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$.

易误提醒 (1)易忽视实际问题的自变量的取值范围，需合理确定函数的定义域. (2)注意问题反馈. 在解决函数模型后，必须验证这个数学结果对实际问题的合理性.

知识点二 三种函数模型性质比较

	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_ax(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在 $(0, +\infty)$ 上的单调性	单调 <u>递增</u> 函数	单调 <u>递增</u> 函数	单调 <u>递增</u> 函数
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图象的变化	随 x 值增大，图象与 y 轴接近平行	随 x 值增大，图象与 x 轴接近平行	随 n 值变化而不同

必记结论 三种模型的增长差异

在区间 $(0, +\infty)$ 上，尽管函数 $y=a^x(a>1)$ ， $y=\log_ax(a>1)$ 和 $y=x^n(n>0)$ 都是增函数，但它们的增长速度不同，而且不在同一个“档次”上. 随着 x 的增大， $y=a^x(a>1)$ 的增长速度越来越快，会超过并远远大于 $y=x^n(n>0)$ 的增长速度，而 $y=\log_ax(a>1)$ 的增长速度则会越来越慢. 因此，总会存在一个 x_0 ，使得当 $x>x_0$ 时，有 $\log_ax<x^n<a^x$.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一二次函数模型的应用

【例 1】经市场调查，某商品在过去 100 天内的销售量和价格均为时间 t (天)的函数，且日销售量近似地满足 $g(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{112}{3}$ ($1 \leq t \leq 100, t \in \mathbf{N}$)。前 40 天价格为 $f(t) = \frac{1}{4}t + 22$ ($1 \leq t \leq 40, t \in \mathbf{N}$)，后 60 天价格为 $f(t) = -\frac{1}{2}t + 52$ ($41 \leq t \leq 100, t \in \mathbf{N}$)，试求该商品的日销售额 $S(t)$ 的最大值和最小值。

解：当 $1 \leq t \leq 40, t \in \mathbf{N}$ 时， $S(t) = g(t)f(t) = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{112}{3}\right)\left(\frac{1}{4}t + 22\right)$
 $= -\frac{1}{12}t^2 + 2t + \frac{112 \times 22}{3} = -\frac{1}{12}(t-12)^2 + \frac{2500}{3}$ ，所以 $768 = S(40) \leq S(t) \leq S(12) = \frac{2500}{3}$ 。
 当 $41 \leq t \leq 100, t \in \mathbf{N}$ 时， $S(t) = g(t)f(t) = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{112}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}t + 52\right)$
 $= \frac{1}{6}t^2 - 36t + \frac{112 \times 52}{3} = \frac{1}{6}(t-108)^2 - \frac{8}{3}$ ，所以 $8 = S(100) \leq S(t) \leq S(41) = \frac{1491}{2}$ 。
 所以， $S(t)$ 的最大值为 $\frac{2500}{3}$ ，最小值为 8。

——方法·规律——

二次函数模型问题的三个注意点

- (1) 二次函数的最值一般利用配方法与函数的单调性解决，但一定要密切注意函数的定义域，否则极易出错。
- (2) 确定一次函数模型时，一般是借助两个点来确定，常用待定系数法；
- (3) 解决函数应用问题时，最后要还原到实际问题。

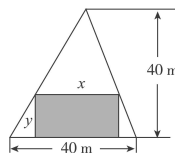
【变式训练 1】在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x 为 _____ m.

解析：由相似三角形性质可得

$$\frac{x}{40} = \frac{40-y}{40}, \text{ 解得 } y = 40-x, \text{ 所以面积 } S = x(40-x) = -x^2 + 40x$$

$$= -(x-20)^2 + 400 (0 < x < 40), \text{ 当 } x = 20 \text{ 时, } S_{\max} = 400.$$

答案：20



考点二函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 模型的应用

【例 2】为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层。某幢建筑物要建造可使用 20 年的隔热层，每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元。该建筑物每年的能源消耗费用 C (单位：万元)与隔热层厚度 x (单位：cm)满足关系 $C(x) =$

$\frac{k}{3x+5}$ ($0 \leq x \leq 10$), 若不建隔热层, 每年能源消耗费用为 8 万元, 设 $f(x)$ 为隔热层建筑费用与 20 年的能源消耗费用之和.

(1) 求 k 的值及 $f(x)$ 的表达式;

(2) 隔热层修建多厚时, 总费用 $f(x)$ 达到最小, 并求最小值.

解: (1) 由已知条件得 $C(0)=8$, 则 $k=40$,

因此 $f(x)=6x+20C(x)=6x+\frac{800}{3x+5}$ ($0 \leq x \leq 10$).

$$(2) f(x)=6x+10+\frac{800}{3x+5}-10 \geq 2\sqrt{(6x+10) \cdot \frac{800}{3x+5}}-10=70(\text{万元}),$$

当且仅当 $6x+10=\frac{800}{3x+5}$, 即 $x=5$ 时等号成立.

所以当隔热层厚度为 5 cm 时, 总费用 $f(x)$ 达到最小值, 最小值为 70 万元.

——方法·规律——

应用函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 模型的关键点

(1) 明确对勾函数是正比例函数 $f(x)=ax$ 与反比例函数 $f(x)=\frac{b}{x}$ 叠加而成的.

(2) 解决实际问题时一般可以直接建立 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的模型, 有时可以将所列函数关系式转化为 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的形式.

(3) 利用模型 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 求解最值时, 要注意自变量的取值范围, 及取得最值时等号成立的条件.

【变式训练 2】要制作一个容积为 4 m^3 , 高为 1 m 的无盖长方体容器. 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是 _____ (单位: 元).

解析: 设该容器的总造价为 y 元, 长方体的底面矩形的边长为 x m, 因为无盖长方体的容积为 4 m^3 , 高为 1 m, 所以长方体的底面矩形的宽为 $\frac{4}{x}$ m, 依题意, 得 $y=20 \times 4 +$

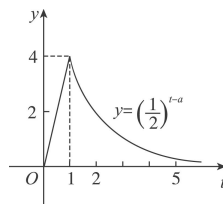
$$10\left(2x+\frac{2 \times 4}{x}\right)=80+20\left(x+\frac{4}{x}\right) \geq 80+20 \times 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}=160$$

(当且仅当 $x=\frac{4}{x}$, 即 $x=2$ 时取等号). 所以该容器的最低总造价为 160 元.

答案: 160

考点三分段函数模型的应用

【例 3】某医药研究所开发的一种新药，如果成年人按规定的剂量服用，据监测：服药后每毫升血液中的含药量 y (微克) 与时间 t (小时) 之间近似满足如图所示的曲线。



(1) 写出第一次服药后 y 与 t 之间的函数关系式 $y=f(t)$;

(2) 据进一步测定：每毫升血液中含药量不少于 0.25 微克时，治疗有效。求服药一次后治疗有效的时间是多长？

解：(1) 由题意可设 $y = \begin{cases} kt, & 0 \leq t \leq 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}, & t > 1 \end{cases}$ 当 $t=1$ 时，由 $y=4$ 得 $k=4$,

由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} = 4$ 得 $a=3$. 因此， $y = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}, & t > 1. \end{cases}$

(2) 由 $y \geq 0.25$ 得 $\begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 4t \geq 0.25, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t > 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3} \geq 0.25. \end{cases}$

解得 $\frac{1}{16} \leq t \leq 5$ ，因此服药一次后治疗有效的时间是 $5 - \frac{1}{16} = \frac{79}{16}$ 小时。

——方法·规律——

解决分段函数模型问题的三个注意点

- (1) 实际问题中有些变量间的关系不能用同一个关系式给出，而是由几个不同的关系式构成，如出租车票价与路程之间的关系，应构建分段函数模型求解；
- (2) 构造分段函数时，要力求准确、简捷，做到分段合理、不重不漏；
- (3) 分段函数的最值是各段的最大(或最小)者的最大者(最小者)。

【变式训练 3】根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位：分钟)为 $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A, \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases} \quad (A, c \text{ 为常数}).$$

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟，组装第 A 件产品用

时 15 分钟，那么 c 和 A 的值分别是()

- A. 75, 25 B. 75, 16 C. 60, 25 D. 60, 16

解析：由函数解析式可以看出，组装第 A 件产品所需时间为 $\frac{c}{\sqrt{A}} = 15$,

故组装第 4 件产品所需时间为 $\frac{c}{\sqrt{4}} = 30$,

解得 $c=60$ ，将 $c=60$ 代入 $\frac{c}{\sqrt{A}} = 15$ ，得 $A=16$ ，故选 D.

答案：D

第十节 变化率与导数、导数的计算

考纲要求：1.了解导数概念的实际背景.

2.理解导数的几何意义.

3.能根据导数的定义求函数 $y=C$ (C 为常数), $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$ 的导数.

4.能利用基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数.

5.能求简单的复合函数(仅限于形如 $f(ax+b)$ 的复合函数)的导数.

课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 导数的概念及几何意义

1.函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$

在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$,即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率(瞬时速度就是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数).相应地,切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3.函数 $f(x)$ 的导函数 称函数 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 的导函数.

易误提醒 (1)求曲线切线时,要分清在点 P 处的切线与过 P 点的切线的区别,前者只有一条,而后者包括了前者.(2)曲线的切线与曲线的交点个数不一定只有一个,这和研究直线与二次曲线相切时有差别.

知识点二 导数的运算

1.基本初等函数的导数公式

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x, (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

2.导数的运算法则

$$(1)[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(2)[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(3) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} (g(x) \neq 0).$$

3. 复合函数的导数

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, 即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

易误提醒 (1)利用公式求导时, 一定要注意公式的适用范围及符号, 如 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 中 $n \neq 0$ 且 $n \in \mathbf{Q}$, $(\cos x)' = -\sin x$. (2)注意公式不要用混, 如 $(a^x)' = a^x \ln a$, 而不是 $(a^x)' = xa^{x-1}$. (3)利用公式求导时要特别注意除法公式中分子的符号, 防止与乘法公式混淆.

■ 课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一 导数的计算

【例 1】(1)若 $y = x \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$, 则 $y' =$ _____.

(2)若 $y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, 则 $y' =$ _____.

(3)若 $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$, 则 $y' =$ _____.

(4)若 $y = \ln(1-2x)$, 则 $y' =$ _____.

解析: (1) $\because y = x \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 + 1 + x^{-2}$, $\therefore y' = 3x^2 - 2x^{-3} = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$.

(2) $\because y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = x - \frac{1}{2} \sin x$, $\therefore y' = 1 - \frac{1}{2} \cos x$.

(3) $\because y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) = 1 - x^{\frac{1}{2}} + x - \frac{1}{2} - 1 = -x^{\frac{1}{2}} + x - \frac{1}{2}$,

$\therefore y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

(4)设 $y = \ln u$, 则 $y = \ln(1-2x)$ 是由 $y = \ln u$ 与 $u = 1-2x$ 复合而成,

所以 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\ln u)' \cdot (1-2x)' = \frac{1}{u} \cdot (-2) = \frac{-2}{1-2x} = \frac{2}{2x-1}$.

答案: (1) $3x^2 - \frac{2}{x^3}$ (2) $1 - \frac{1}{2} \cos x$ (3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ (4) $\frac{2}{2x-1}$

——方法·规律——

求函数导数的三种原则

1. 原则一：乘积形式先展开化为多项式形式，再求导.
2. 原则二：根式形式先化为分数指数幂，再求导.
3. 原则三：复杂分式先将分式化简，再求导.

[提醒] 复合函数求导时，先确定复合关系，由外向内逐层求导，必要时可换元.

【变式训练 1】(1) 若函数 $f(x) = \ln x - f'(-1)x^2 + 3x - 4$ ，则 $f'(1) =$ _____.

(2) 已知 $f_1(x) = \sin x + \cos x$ ，记 $f_2(x) = f_1'(x)$ ， $f_3(x) = f_2'(x)$ ， $\dots$ ， $f_n(x) = f_{n-1}'(x) (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ ，则 $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots + f_{2016}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

解析：(1) $\because f'(x) = \frac{1}{x} - 2f'(-1)x + 3$ ， $\therefore f'(-1) = -1 + 2f'(-1) + 3$ ，

解得 $f'(-1) = -2$ ， $\therefore f'(1) = 1 + 4 + 3 = 8$.

(2) $f_2(x) = f_1'(x) = \cos x - \sin x$ ， $f_3(x) = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$ ，

$f_4(x) = -\cos x + \sin x$ ， $f_5(x) = \sin x + \cos x$ ，以此类推，可得出 $f_n(x) = f_{n+4}(x)$ ，

又 $\because f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 0$ ， $\therefore f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots + f_{2016}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= 504 \left[f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_3\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 0$.

答案：(1) 8 (2) 0

考点二 导数的几何意义

角度一 求切线方程

【例 2-1】(1) 曲线 $y = xe^x + 2x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为()

- A. $y = 3x - 1$ B. $y = -3x - 1$ C. $y = 3x + 1$ D. $y = -2x - 1$

(2) 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 过点 $(2, 4)$ 的切线方程为_____.

解析：(1) $\because y' = e^x + xe^x + 2 = (x+1)e^x + 2$ ， $\therefore$ 曲线在 $(0, -1)$ 处切线的斜率为 $y'|_{x=0} = 3$ ，

$\therefore$ 所求切线方程为 $y + 1 = 3x$ ，即 $y = 3x - 1$ ，故选 A.

(2) 设切点为 $\left(x_0, \frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right)$ ，则切线的斜率为 $y'|_{x=x_0} = x_0^2$.

故切线方程为 $y - \left(\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right) = x_0^2(x - x_0)$. 又切线过点 $(2, 4)$ ，

所以 $4 - \left(\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right) = x_0^2(2 - x_0)$ ，整理得 $x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$ ，所以 $x_0^3 + x_0^2 - 4x_0^2 + 4 = 0$.

即 $x_0^2(x_0 + 1) - 4(x_0 + 1)(x_0 - 1) = 0$ ，故 $(x_0 + 1)(x_0 - 2)^2 = 0$ ，解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$ ，

所以，所求切线方程为 $x - y + 2 = 0$ 或 $4x - y - 4 = 0$.

答案：(1) A (2) $x - y + 2 = 0$ 或 $4x - y - 4 = 0$

角度二 求切点坐标

【例 2-2】设曲线 $y=e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 上点 P 处的切线互相垂直，
则 P 的坐标为_____.

解析： $y=e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率 $k_1=e^x|_{x=0}=1$. 设 $P\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$,
则 $y=\frac{1}{x}$ 在 P 处的切线斜率 $k_2=-\frac{1}{x^2}|_{x=x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$. 由题意知 $k_1 \cdot k_2 = -1$,
即 $-\frac{1}{x_0^2} = -1$, $x_0^2 = 1$, $x_0 = 1$, 故 P 点坐标为 $(1, 1)$.

答案： $(1, 1)$

角度三 求参数值

【例 2-3】已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 a 的值为()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

解析： 设直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 的切点为 (x_0, y_0) ，则 $y_0=1+x_0$, $y_0=\ln(x_0+a)$.

又 $y'=\frac{1}{x+a}$ ，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0+a}=1$ ，即 $x_0+a=1$.

又 $y_0=\ln(x_0+a)$ ，所以 $y_0=0$ ，则 $x_0=-1$ ，所以 $a=2$ ，故选 B.

答案： B

(文)【例 2-3】已知直线 $x+y=b$ 是函数 $y=ax+\frac{2}{x}$ 的图象在点 $P(1, m)$ 处的切线，则 $a+b-m$ =_____.

解析： 由于 P 点在函数 $y=ax+\frac{2}{x}$ 图象和直线 $x+y=b$ 上，则 $m=a+2$, $m+1=b$. 又由函数 $y=ax+\frac{2}{x}$ 的导函数 $y'=a-\frac{2}{x^2}$ 可知，切线的斜率 $k=-1=a-2$ ，有 $a=1$, $m=3$ 和 $b=4$ ，则 $a+b-m=2$.

答案： 2

角度四 求距离的最小值

【例 2-4】若点 P 是函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 图象上的任意一点，则点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的最小距离为()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 3

解析： 由 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}=1$ 得 $x=1$ (负值舍去)，所以曲线 $y=f(x)=x^2-\ln x$ 上的切线斜率

为 1 的点是(1, 1), 所以点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的最小距离为 $\frac{|1-1-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 故选 B.

答案: B

——方法·规律——

(1)已知切点 $A(x_0, y_0)$ 求斜率 k , 即求该点处的导数值 $k=f'(x_0)$.

(2)已知斜率 k , 求切点 $A(x_1, f(x_1))$, 即解方程 $f'(x_1)=k$.

(3)求过某点 $M(x_1, y_1)$ 的切线方程时, 需设出切点 $A(x_0, f(x_0))$, 则切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, 再把点 $M(x_1, y_1)$ 代入切线方程, 求 x_0 .

(4)根据导数的几何意义求参数的值时, 一般是利用切点 $P(x_0, y_0)$ 既在曲线上又在切线上构造方程组求解.

【变式训练 2】(1)已知 $f(x)=x^3-2x^2+x+6$, 则 $f(x)$ 在点 $P(-1, 2)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积等于()

- A. 4 B. 5 C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{13}{2}$

(2)若曲线 $y=x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x-y+1=0$, 则点 P 的坐标是_____.

解析: (1) $\because f(x)=x^3-2x^2+x+6$, $\therefore f'(x)=3x^2-4x+1$, $\therefore f'(-1)=8$,

故切线方程为 $y-2=8(x+1)$, 即 $8x-y+10=0$,

令 $x=0$, 得 $y=10$, 令 $y=0$, 得 $x=-\frac{5}{8}$, $\therefore$ 所求面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}\times 10=\frac{25}{8}$, 故选 C.

(2)由题意得 $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$, 直线 $2x-y+1=0$ 的斜率为 2. 设 $P(m, n)$, 则 $1+\ln m=2$, 解得 $m=e$, 所以 $n=e\ln e=e$, 即点 P 的坐标为 (e, e) .

答案: (1)C (2) (e, e)

第十一节 导数的应用

考纲要求: 1. 了解函数单调性和导数的关系; 能利用导数研究函数的单调性, 会求函数的单调区间(其中多项式函数一般不超过三次).

2. 了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件; 会用导数求函数的极大值、极小值(其中多项式函数一般不超过三次).

3. 会求闭区间上函数的最大值、最小值(其中多项式函数一般不超过三次).

4. 会利用导数解决某些实际问题.

课前·双基落实 夯基点 扫盲点

知识点一 利用导数研究函数的单调性

1. 函数 $f(x)$ 在某个区间 (a, b) 内的单调性与其导数的正负有如下关系

(1) 若 $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在这个区间上是增加的.

(2) 若 $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在这个区间上是减少的.

(3) 若 $f'(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在这个区间内是常数.

2. 利用导数判断函数单调性的一般步骤

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 在定义域内解不等式 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$;

(3) 根据结果确定 $f(x)$ 的单调区间.

易误提醒 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$, 且在 (a, b) 的任意子区间, 等号不恒成立; 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减, 则 $f'(x) \leq 0$, 且在 (a, b) 的任意子区间, 等号不恒成立.

知识点二 利用导数研究函数的极值

1. 函数的极大值

在包含 x_0 的一个区间 (a, b) 内, 函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都小于 x_0 的函数值, 称数 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极大值点, 其函数值 $f(x_0)$ 为函数的极大值.

2. 函数的极小值

在包含 x_0 的一个区间 (a, b) 内, 函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都大于 x_0 的函数值, 称数 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极小值点, 其函数值 $f(x_0)$ 为函数的极小值. 极大值与极小值统称为极值, 极大值点与极小值点统称为极值点.

易误提醒 $f'(x_0)=0$ 是 x_0 为 $f(x)$ 的极值点的非充分非必要条件. 例如, $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$, 但 $x=0$ 不是极值点; 又如 $f(x)=|x|$, $x=0$ 是它的极小值点, 但 $f'(0)$ 不存在.

知识点三 函数的最值与导数

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最值的条件:

一般地, 如果在区间 $[a, b]$ 上, 函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 那么它必有最大值和最小值.

2. 求函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤为:

(1) 求函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

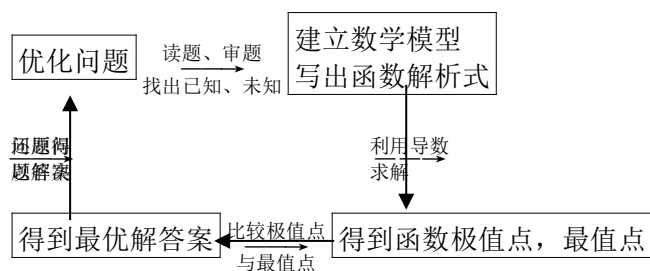
易误提醒 (1) 易混极值与最值: 注意函数最值是个“整体”概念, 而极值是个“局部”

概念.

(2)极值只能在定义域内部取得，而最值却可以在区间的端点取得，有极值的未必有最值，有最值的未必有极值；极值有可能成为最值，最值只要不在端点必定是极值.

知识点四 生活中的优化问题

利用导数解决生活中的优化问题的一般步骤



第一课时 导数与函数的单调性

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一判断或证明函数的单调性

【例1】已知函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

思路分析: 先求出 $f(x)$ 的定义域, 再求出导函数 $f'(x)$, 然后对 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 分类讨论.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a$. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, 则 $x \in [0, \frac{1}{a}]$ 时, $f'(x) > 0$;

$x \in [\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{a}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

——方法·规律——

导数法证明函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的单调性的步骤

(1)一求: 求 $f'(x)$;

(2)二定: 确认 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的符号;

(3)三结论: $f'(x) > 0$ 时为增函数; $f'(x) < 0$ 时为减函数.

[提醒] 研究含参数函数的单调性时, 需注意依据参数取值对不等式解集的影响进行分类讨论.

【变式训练1】函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+a}$ ($a > 1$), 讨论 $f(x)$ 的单调性.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{x[x - (a^2 - 2a)]}{(x+1)(x+a)^2}$.

①当 $1 < a < 2$ 时, 若 $x \in (-1, a^2 - 2a)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-1, a^2 - 2a)$ 内是增函数;

若 $x \in (a^2 - 2a, 0)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(a^2 - 2a, 0)$ 内是减函数;

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是增函数.

②当 $a=2$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f'(x)=0$ 成立当且仅当 $x=0$, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是增函数.

③当 $a > 2$ 时, 若 $x \in (-1, 0)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内是增函数;

若 $x \in (0, a^2 - 2a)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, a^2 - 2a)$ 内是减函数;

若 $x \in (a^2 - 2a, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(a^2 - 2a, +\infty)$ 内是增函数.

(文)【变式训练 1】(2016·课标卷 II 节选)讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性, 并证明当 $x > 0$ 时,

$$(x-2)e^x + x + 2 > 0.$$

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)e^x - (x-2)e^x}{(x+2)^2} = \frac{x^2e^x}{(x+2)^2} \geq 0,$$

且仅当 $x=0$ 时, $f'(x)=0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$ 单调递增,

因此当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > f(0) = -1$, 所以 $(x-2)e^x > -(x+2)$, $(x-2)e^x + x + 2 > 0$.

考点二求函数的单调区间

【例 2】已知函数 $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{a}{x} - \ln x - \frac{3}{2}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y = \frac{1}{2}x$.

(1)求 a 的值;

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解: (1)对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$, 由 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y = \frac{1}{2}x$,

知 $f'(1) = -\frac{3}{4} - a = -2$, 解得 $a = \frac{5}{4}$.

(2)由(1)知 $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4x} - \ln x - \frac{3}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{4x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 5$, 因 $x = -1$ 不在 $f(x)$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 内, 故舍去.

当 $x \in (0, 5)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 5)$ 内为减函数;

当 $x \in (5, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(5, +\infty)$ 内为增函数.

——方法·规律——

确定函数单调区间步骤

(1)确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求 $f'(x)$;

(3)解不等式 $f'(x) > 0$ ，解集在定义域内的部分为单调递增区间；

(4)解不等式 $f'(x) < 0$ ，解集在定义域内的部分为单调递减区间。

【变式训练 2】已知函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - ax (a > 0)$ 。

(1)若函数 $y = f(x)$ 的导函数为奇函数，求 a 的值；

(2)求函数 $y = f(x)$ 的单调区间。

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - a$ 。∵ $f'(x)$ 是奇函数，

∴ $f(0) = 0$ ，即 $\frac{1}{2} - a = 0$ ， $a = \frac{1}{2}$ 。

(2)由 $f'(x) > 0$ ，得 $\frac{e^x}{e^x + 1} > a$ ，即 $(1-a)e^x > a$ 。

当 $0 < a < 1$ 时，得 $e^x > \frac{a}{1-a}$ ， $x > \ln \frac{a}{1-a}$ ；当 $a \geq 1$ 时，不等式 $(1-a)e^x > a$ 无解。

由 $f'(x) < 0$ ，得 $\frac{e^x}{e^x + 1} < a$ ，即 $(1-a)e^x < a$ 。当 $0 < a < 1$ 时，得 $e^x < \frac{a}{1-a}$ ， $x < \ln \frac{a}{1-a}$ ；

当 $a \geq 1$ 时，不等式 $(1-a)e^x < a$ 恒成立，即 $x \in \mathbf{R}$ 。

综上，当 $0 < a < 1$ 时， $y = f(x)$ 的递增区间为 $\left[\ln \frac{a}{1-a}, +\infty\right)$ ，递减区间为 $\left(-\infty, \ln \frac{a}{1-a}\right]$ ；

当 $a \geq 1$ 时， $y = f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(文)【变式训练 2】已知函数 $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0)$ ， $g(x) = x^3 + bx$ 。

(1)若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, e)$ 处具有公共切线，求 a, b 的值；

(2)当 $a^2 = 4b$ 时，求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调区间。

解：(1) $f'(x) = 2ax$ ， $g'(x) = 3x^2 + b$ ，由已知可得 $\begin{cases} f(1) = a + 1 = e, \\ g(1) = 1 + b = e, \\ 2a = 3 + b, \end{cases}$ 解得 $a = b = 3$ 。

(2)令 $F(x) = f(x) + g(x) = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{4}x + 1$ ， $F'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{a^2}{4}$ 。

令 $F'(x) = 0$ ，得 $x_1 = -\frac{a}{2}$ ， $x_2 = -\frac{a}{6}$ 。∵ $a > 0$ ，∴ $x_1 < x_2$ ，

由 $F'(x) > 0$ 得， $x < -\frac{a}{2}$ 或 $x > -\frac{a}{6}$ ；由 $F'(x) < 0$ 得， $-\frac{a}{2} < x < -\frac{a}{6}$ ，

∴ 单调递增区间是 $\left(-\infty, -\frac{a}{2}\right)$ ， $\left(-\frac{a}{6}, +\infty\right)$ ；单调递减区间为 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}\right)$ 。

考点三 已知函数单调性求参数范围

【例 3】已知函数 $f(x) = x^3 - ax - 1$ 。

(1)若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，求 a 的取值范围；

(3)若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为减函数，求 a 的取值范围；

(4)若 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1)$ ，求 a 的值；

(5)若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调，求 a 的取值范围.

解析：(1) $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数， $\therefore f'(x) = 3x^2 - a \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

$\therefore a \leq 3x^2$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. $\because 3x^2 \geq 0$ ， $\therefore$ 只需 $a \leq 0$.

又 $\because a = 0$ 时， $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ， $f(x) = x^3 - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

(2) $\because f'(x) = 3x^2 - a$ ，

且 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数， $\therefore f'(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，

$\therefore 3x^2 - a \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立， $\therefore a \leq 3x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，

$\therefore a \leq 3$. 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

(3) $\because f'(x) = 3x^2 - a$ ，且 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为减函数，

$\therefore f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - a \leq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立， $\therefore a \geq 3x^2$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立.

$\because x \in (-1, 1)$ ， $\therefore 3x^2 < 3$ ，即 $a \geq 3$. $\therefore a$ 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

(4) $f'(x) = 3x^2 - a$.

①当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数.

②当 $a > 0$ 时，由 $f'(x) < 0$ ，得 $3x^2 - a < 0$ ，

所以 $x^2 < \frac{a}{3}$ ，即 $-\sqrt{\frac{a}{3}} < x < \sqrt{\frac{a}{3}}$ ，故 $f(x)$ 的递减区间为 $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

由题意，得 $\sqrt{\frac{a}{3}} = 1$ ，解得 $a = 3$.

(5) $f'(x) = 3x^2 - a$.

①当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数，

②当 $a > 0$ 时，由 $f'(x) > 0$ ，即 $3x^2 - a > 0$ ，解得 $x < -\sqrt{\frac{a}{3}}$ 或 $x > \sqrt{\frac{a}{3}}$ ；

由 $f'(x) < 0$ ，即 $3x^2 - a < 0$ ，解得 $-\sqrt{\frac{a}{3}} < x < \sqrt{\frac{a}{3}}$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$ ， $\left[\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ 上为增函数，在 $\left[-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 上为减函数.

$\because f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调， $\therefore 0 < \sqrt{\frac{a}{3}} < 1$ ，解得 $0 < a < 3$. $\therefore a$ 的取值范围是 $(0, 3)$.

——方法·规律——

已知函数的单调性求参数范围的两个方法

(1)利用集合间的包含关系求解：即若 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上单调，则区间 (a, b) 是相应单调区间的子集.

(2)转化为不等式恒成立问题求解：即“若函数 $y=f(x)$ 单调递增，则 $f(x) \geq 0$ 恒成立；若函数 $y=f(x)$ 单调递减，则 $f(x) \leq 0$ 恒成立”.

【变式训练 3】已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax - \ln x$ ，若 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{3}, 2]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围为_____.

解析： $f'(x) = x + 2a - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $[\frac{1}{3}, 2]$ 上恒成立，即 $2a \geq -x + \frac{1}{x}$ 在 $[\frac{1}{3}, 2]$ 上恒成立，

$$\therefore \left(-x + \frac{1}{x}\right)_{\max} = \frac{8}{3}, \therefore 2a \geq \frac{8}{3}, \text{ 即 } a \geq \frac{4}{3}. \text{ 答案: } \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

考点四构造法在函数单调性中的应用

【例 4】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(-1)=2$ ，对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $f'(x) > 2$ ，则 $f(x) > 2x+4$ 的解集为()

A. $(-1, 1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, +\infty)$

(2)已知函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称，且当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x) + xf'(x) < 0$

成立(其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数). 若 $a = (3^{0.3}) \cdot f(3^{0.3})$, $b = (\log_3 3) \cdot f(\log_3 3)$, $c = \left(\log_3 \frac{1}{9}\right) \cdot f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right)$,

则 a, b, c 的大小关系是()

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

解析：(1)令 $g(x) = f(x) - 2x - 4$ ，则 $g'(x) = f'(x) - 2$.

$\because f'(x) > 2, \therefore f'(x) - 2 > 0$ ，即 $g'(x) > 0$ ， $\therefore g(x) = f(x) - 2x - 4$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $\because f(-1) = 2, \therefore g(-1) = f(-1) - 2 = 0, \therefore g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(-1) \Leftrightarrow x > -1$,

$\therefore f(x) > 2x + 4$ 的解集是 $(-1, +\infty)$ ，故选 B.

(2) $\because$ 函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称， $\therefore y=f(x)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称，

$\therefore y=f(x)$ 为奇函数. 令 $g(x) = xf(x)$ ，则 $g(x) = xf(x)$ 为偶函数，

且 $g'(x) = f(x) + xf'(x) < 0$ ，在 $(-\infty, 0)$ 上恒成立， $\therefore g(x) = xf(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，

在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. $\therefore c = \left(\log_3 \frac{1}{9}\right) \cdot f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right) = (-2) \cdot f(-2) = 2f(2), 0 < \log_3 3 < 3^{0.3} <$

2,

$\therefore g(\log_{\pi} 3) < g(3^{0.3}) < g(2)$, $\therefore c > a > b$, 故选 C.

答案: (1)B (2)C

——方法·规律——

构造法在函数单调性中的解题策略

对于含有导函数的不等式问题,一般要根据不等式(或其变形)的结构特征构造新的函数,并对构造的新函数求导,并研究其单调性,问题可获解.一般规律是:

(1) 若 $f(x)+xf'(x)>0$, 则可构造 $y=x\cdot f(x)$;

(2) 若 $f(x) - xf'(x) > 0$, 则可构造 $y = \frac{x}{f(x)}$;

(3) 若 $f(x) > f'(x)$, 则可构造 $y = \frac{f(x)}{e^x}$.

【变式训练 4】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(0)=2$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)+f'(x) > 1$, 则不等式

$$e^x \cdot f(x) > e^x + 1$$
 的解集是()

A. $\{x|x>0\}$

B. $\{x|x<0\}$

C. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

D. $\{x|x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

解析: 令 $g(x) = e^x \cdot f(x) - e^x - 1$, 则 $g'(x) = e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) - e^x = e^x[f(x) + f'(x) - 1]$

$\because f(x)+f(x)>1, \therefore g'(x)=e^{x[f(x)+f(x)-1]}>0, \therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

$$\text{又} \because g(0)=e^0 \cdot f(0)-e^0-1=0, \therefore e^x \cdot f(x) > e^x+1 \Leftrightarrow e^x \cdot f(x)-e^x-1 > 0 \Leftrightarrow$$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$, 故选 A.

答案: A

第二课时 导数与函数的极值、最值

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一利用导数研究函数的极值

角度一 利用导数研究函数的极值

【例 1-1】 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示,

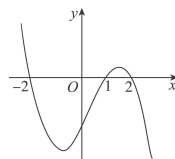
则下列结论中一定成立的是()

A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$



解析: ①当 $x < -2$ 时, $1-x > 0$. $\therefore (1-x)f'(x) > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是增函数.

②当 $-2 < x < 1$ 时, $1-x > 0$. $\therefore (1-x)f'(x) < 0$, $\therefore f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-2, 1)$ 上是减函数.

③当 $1 < x < 2$ 时, $1-x < 0$. $\therefore (1-x)f'(x) > 0$, $\therefore f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上是减函数.

④当 $x > 2$ 时, $1-x < 0$. $\therefore (1-x)f'(x) < 0$, $\therefore f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数,

综上, $f(-2)$ 为极大值, $f(2)$ 为极小值, 故选 D.

答案: D

角度二 已知函数求极值

【例 1-2】(2017·贵阳期末改编)已知函数 $f(x) = \frac{ax-a}{e^x}$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$), 求 $f(x)$ 的极值.

$$\text{解: } f(x) = \frac{ae^x - (ax-a)e^x}{e^{2x}} = \frac{-a(x-2)}{e^x}.$$

(1)当 $a < 0$ 时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		极小值	

所以, $f(x)$ 有极小值为 $f(2) = \frac{a}{e^2}$, 无极大值.

(2)当 $a > 0$ 时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

所以, $f(x)$ 有极大值为 $f(2) = \frac{a}{e^2}$, 无极小值.

综上, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有极小值为 $\frac{a}{e^2}$, 无极大值;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有极大值为 $\frac{a}{e^2}$, 无极小值.

角度三 已知极值求参数

【例 1-3】已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, +\infty)$

解析: $\therefore f(x) = x(\ln x - ax)$, $\therefore f'(x) = \ln x - 2ax + 1$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的零点，令 $f(x)=0$ ，则 $2a=\frac{\ln x+1}{x}$ ，

设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ ，则 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$ ， $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

又 $\because$ 当 $x \rightarrow 0$ 时， $g(x) \rightarrow -\infty$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $g(x) \rightarrow 0$ ，而 $g(x)_{\max}=g(1)=1$ ，

$\therefore$ 只需 $0 < 2a < 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$ ，故选 B.

答案：B

——方法·规律——

函数极值问题的常见类型及解题策略

(1) 如图判断函数极值的情况. 先找导数为 0 的点，再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号.

(2) 已知函数求极值. 求 $f'(x) \rightarrow$ 求方程 $f'(x)=0$ 的根 $\rightarrow$ 列表检验 $f'(x)$ 在 $f'(x)=0$ 的根的附近两侧的符号 $\rightarrow$ 下结论. 若函数解析式中含有参数，要注意对参数分类讨论.

(3) 已知极值求参数. 若函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$ ，且在该点左、右两侧的导数值符号相反.

【变式训练 1】(1) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. -2 C. -2 或 $-\frac{2}{3}$ D. 2 或 $-\frac{2}{3}$

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 的导函数的图象如图所示，给出下列判断：

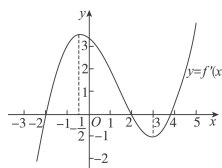
① 函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ 内单调递增；

② 函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ 内单调递减；

③ 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(4, 5)$ 内单调递增；

④ 当 $x=2$ 时，函数 $y=f(x)$ 有极小值；

⑤ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 有极大值.



则上述判断中正确的是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ③④⑤ D. ③

解析：(1) 由题意知， $f'(x)=3x^2+2ax+b$ ， $f'(1)=0$ ，

$$f(1)=10, \text{ 即 } \begin{cases} 3+2a+b=0, \\ 1+a+b-a^2-7a=10, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-2, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-6, \\ b=9 \end{cases} \text{ 经检验 } \begin{cases} a=-6, \\ b=9 \end{cases}$$

满足题意，所以 $\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$ ，故选 A.

(2) 当 $x \in (-3, -2)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，①错；当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，当 $x \in (2, 3)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，②错；当 $x = 2$ 时，函数 $y = f(x)$ 有极大值，④错；当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，函数 $y = f(x)$ 无极值，⑤错，故选 D.

答案：(1)A (2)D

考点二利用导数研究函数的最值

【例 2】已知函数 $f(x) = x - e^{ax} (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right]$ 上的最大值.

解：(1) $f(x) = x - e^{ax} (a > 0)$ ，则 $f'(x) = 1 - ae^{ax}$ ，令 $f'(x) = 1 - ae^{ax} = 0$ ，则 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$.

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty, \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

故函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left(-\infty, \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}\right)$ ，减区间为 $\left(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$.

(2) 当 $\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} \geq \frac{2}{a}$ ，即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时， $f(x)_{\max} = f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a} - e^2$ ；

当 $\frac{1}{a} < \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} < \frac{2}{a}$ ，即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$ ；

当 $\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a}$ ，即 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - e$.

(文) 【例 2】已知函数 $f(x) = (x - k)e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

解：(1) $f'(x) = (x - k + 1)e^x$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = k - 1$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty, k-1)$	$k-1$	$(k-1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	递减	$-e^{k-1}$	递增

所以, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k-1)$, 单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$.

(2) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(0) = -k$; 当 $0 < k-1 < 1$, 即 $1 < k < 2$ 时,

由(1)知 $f(x)$ 在 $[0, k-1]$ 上单调递减,

在 $(k-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$;

当 $k-1 \geq 1$ 时, 即 $k \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(1) = (1-k)e$.

——方法·规律——

求函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最值的方法

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增或递减, $f(a)$ 与 $f(b)$ 一个为最大值, 一个为最小值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有极值, 先求出函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值, 与 $f(a)$ 、 $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个最小值.

(3) 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有唯一一个极值点时, 这个极值点就是最大(或最小)值点.

【变式训练 2】设函数 $f(x) = a \ln x - bx^2 (x > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 相切,

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值.

解：(1) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx$, $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 相切,

$$\therefore \begin{cases} f'(1) = a - 2b = 0, \\ f(1) = -b = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 由(1)得 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$,

$\because$ 当 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $\frac{1}{e} < x < 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x \leq e$,

$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, e]$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = -\frac{1}{2}$.

考点三函数极值与最值的综合问题

【例 3】已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x}$ ($a > 0$) 的导函数 $y = f'(x)$ 的两个零点为 -3 和 0 .

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 的极小值为 $-e^3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-5, +\infty)$ 上的最大值.

$$\text{解: (1)} f'(x) = \frac{(2ax + b)e^x - (ax^2 + bx + c)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-ax^2 + (2a - b)x + b - c}{e^x},$$

$$\text{令 } g(x) = -ax^2 + (2a - b)x + b - c,$$

因为 $e^x > 0$, 所以 $y = f'(x)$ 的零点就是 $g(x) = -ax^2 + (2a - b)x + b - c$ 的零点, 且 $f'(x)$ 与 $g(x)$ 符号相同.

又因为 $a > 0$, 所以 $-3 < x < 0$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,

当 $x < -3$ 时或 $x > 0$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-3, 0)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -3)$, $(0, +\infty)$.

(2) 由(1)知, $x = -3$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 所以有

$$\begin{cases} \frac{9a - 3b + c}{e^{-3}} = -e^3, \\ g(0) = b - c = 0, \\ g(-3) = -9a - 3(2a - b) + b - c = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 1, b = 5, c = 5, \text{ 所以 } f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{e^x}.$$

因为 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-3, 0)$, 单调减区间是 $(-\infty, -3)$, $(0, +\infty)$,

所以 $f(0) = 5$ 为函数 $f(x)$ 的极大值, 故 $f(x)$ 在区间 $[-5, +\infty)$ 上的最大值取 $f(-5)$ 和 $f(0)$

中的最大者. 而 $f(-5) = \frac{5}{e^{-5}} = 5e^5 > 5 = f(0)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-5, +\infty)$ 上的最大值是 $5e^5$.

——方法·规律——

求一个函数在闭区间上的最值和在无穷区间(或开区间)上的最值时, 方法是不同的. 求函数在无穷区间(或开区间)上的最值, 不仅要研究其极值情况, 还要研究其单调性, 并通过单调性和极值情况, 画出函数的大致图象, 然后借助图象观察得到函数的最值.

【变式训练 3】已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线为 $l: 3x - y$

$+ 1 = 0$, 若 $x = \frac{2}{3}$ 时, $y = f(x)$ 有极值.

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 求 $y = f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值和最小值.

解: (1) 由 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

当 $x=1$ 时，切线 l 的斜率为 3，可得 $2a+b=0$ ，①

当 $x=\frac{2}{3}$ 时， $y=f(x)$ 有极值，则 $f'(\frac{2}{3})=0$ ，

可得 $4a+3b+4=0$ ，②由①②，解得 $a=2$ ， $b=-4$ 。

由于切点的横坐标为 1，所以 $f(1)=4$ ，所以 $1+a+b+c=4$ ，得 $c=5$ 。

(2)由(1)可得 $f(x)=x^3+2x^2-4x+5$ ， $f'(x)=3x^2+4x-4$ 。令 $f'(x)=0$ ，解得 $x_1=-2$ ， $x_2=\frac{2}{3}$ 。

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的取值及变化情况如下表所示：

x	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 1)$	1
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	8		13		$\frac{95}{27}$		4

所以 $y=f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 13，最小值为 $\frac{95}{27}$ 。

第三课时 导数与函数的综合问题

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一利用导数研究生活中的优化问题

【例 1】某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池(不计厚度)。设该蓄水池的底面半径为 r 米，高为 h 米，体积为 V 立方米。假设建造成本仅与表面积有关，侧面的建造成本为 100 元/平方米，底面的建造成本为 160 元/平方米，该蓄水池的总建造成本为 $12\,000\pi$ 元(π 为圆周率)。

(1)将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$ ，并求该函数的定义域；

(2)讨论函数 $V(r)$ 的单调性，并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大。

解：(1)因为蓄水池侧面的总成本为 $100 \times 2\pi rh = 200\pi rh$ 元，底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，所以蓄水池的总成本为 $(200\pi rh + 160\pi r^2)$ 元。又根据题意得 $200\pi rh + 160\pi r^2 = 12\,000\pi$ ，所以 $h = \frac{1}{5r}(300r - 4r^2)$ ，从而 $V(r) = \pi r^2 h = \frac{\pi}{5}(300r - 4r^3)$ 。

因为 $r > 0$ ，又由 $h > 0$ 可得 $r < 5\sqrt{3}$ ，故函数 $V(r)$ 的定义域为 $(0, 5\sqrt{3})$ 。

(2)因 $V(r) = \frac{\pi}{5}(300r - 4r^3)$ ，所以 $V'(r) = \frac{\pi}{5}(300 - 12r^2)$ 。

令 $V'(r) = 0$ ，解得 $r_1 = 5$ ， $r_2 = -5$ (因为 $r_2 = -5$ 不在定义域内，舍去)。

当 $r \in (0, 5)$ 时， $V'(r) > 0$ ，故 $V(r)$ 在 $(0, 5)$ 上为增函数；当 $r \in (5, 5\sqrt{3})$ 时， $V'(r) < 0$ ，

故 $V(r)$ 在 $(5, 5\sqrt{3})$ 上为减函数. 由此可知, $V(r)$ 在 $r=5$ 处取得最大值, 此时 $h=8$, 即当 $r=5$, $h=8$ 时, 该蓄水池的体积最大.

——方法·规律——

利用导数解决生活中的优化问题的一般步骤

- (1) 分析实际问题中各量之间的关系, 列出实际问题的数学模型, 写出实际问题中变量之间的函数关系式 $y=f(x)$;
- (2) 求函数的导数 $f'(x)$, 解方程 $f'(x)=0$;
- (3) 比较函数在区间端点和 $f'(x)=0$ 的点的函数值的大小, 最大(小)者为最大(小)值;
- (4) 回归实际问题作答.

【变式训练 1】某商场销售某种商品的经验表明, 该商品每日的销售量 y (单位: 千克) 与销

售价格 x (单位: 元/千克) 满足关系式 $y=\frac{a}{x-3}+10(x-6)^2$, 其中 $3<x<6$, a 为常数. 已知销售价格为 5 元/千克时, 每日可售出该商品 11 千克.

(1) 求 a 的值;

(2) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

解: (1) 因为 $x=5$ 时, $y=11$, 所以 $\frac{a}{2}+10=11$, $a=2$.

(2) 由(1)可知, 该商品每日的销售量 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$,

所以商场每日销售该商品所获得的利润 $f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=$

$2+10(x-3)(x-6)^2$, $3<x<6$. 从而, $f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=$

$30(x-4)(x-6)$. 于是, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(3, 4)$	4	$(4, 6)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

由上表可得, $x=4$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(3, 6)$ 内的极大值点, 也是最大值点.

所以, 当 $x=4$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 且最大值等于 42.

当销售价格为 4 元/千克时, 商场每日销售该商品所获得的利润最大.

考点二利用导数研究函数的零点或方程的根

【例 2】设 $a>1$, 函数 $f(x)=(1+x^2)e^x-a$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明： $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点.

解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，由导数公式知 $f'(x)=2xe^x+(1+x^2)e^x=(x+1)^2e^x$ ， $x\in\mathbf{R}$.

$\therefore$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ ，都有 $f'(x)\geq 0$ ， $\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$ ，无单调递减区间.

(2) 证明：由(1)知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，

且 $f(0)=1-a<0$ ， $f(\sqrt{a-1})=ae^{\sqrt{a-1}}-a=a(e^{\sqrt{a-1}}-1)$.

$\therefore a>1$ ， $\therefore a-1>0$ ， $\therefore \sqrt{a-1}>0$ ， $\therefore e^{\sqrt{a-1}}>1$ ， $\therefore e^{\sqrt{a-1}}-1>0$ ，故 $f(\sqrt{a-1})>0$ ，

$\therefore \exists x_0\in(0, \sqrt{a-1})$ 使得 $f(x_0)=0$.又 $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点.

——方法·规律——

利用导数研究方程根的方法

研究方程根的情况，可以通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等，根据题目要求，画出函数图象的走势规律，标明函数极(最)值的位置，通过数形结合的思想去分析问题，可以使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=(2-a)x-2(1+\ln x)+a$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上无零点，求 a 的最小值.

解：(1)当 $a=1$ 时， $f(x)=x-1-2\ln x$ ，则 $f'(x)=1-\frac{2}{x}$ ，定义域 $x\in(0, +\infty)$.

由 $f'(x)>0$ ，得 $x>2$ ，由 $f'(x)<0$ ，得 $0<x<2$ ，

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$ ，单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

(2) $f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x$ ，令 $m(x)=(2-a)(x-1)$ ， $x>0$ ；

$h(x)=2\ln x$ ， $x>0$ ，则 $f(x)=m(x)-h(x)$.

①当 $a<2$ 时， $m(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上为增函数， $h(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上为增函数，

若 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上无零点，则 $m\left(\frac{1}{2}\right)\geq h\left(\frac{1}{2}\right)$.

即 $(2-a)\left(\frac{1}{2}-1\right)\geq 2\ln \frac{1}{2}$ ， $\therefore a\geq 2-4\ln 2$ ， $\therefore 2-4\ln 2\leq a<2$.

②当 $a\geq 2$ 时，在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上 $m(x)\geq 0$ ， $h(x)<0$ ，

$\therefore f(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上无零点. 由①②得 $a \geq 2 - 4\ln 2$, $\therefore a_{\min} = 2 - 4\ln 2$.

考点三利用导数研究与不等式有关的问题

角度一 证明不等式

【例 3-1】已知 $f(x) = (1-x)e^x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > -1$, 且 $x \neq 0$, 证明: $g(x) < 1$.

解: (1) $f'(x) = -xe^x$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 0$.

(2) 证明: 由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $g(x) < 0 < 1$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < 1$ 等价于 $f(x) > x$. 设 $h(x) = f(x) - x$, 则 $h'(x) = -xe^x - 1$.

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $0 < -x < 1$, $0 < e^x < 1$, 则 $0 < -xe^x < 1$,

从而当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递减.

当 $-1 < x < 0$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g(x) < 1$. 综上, 总有 $g(x) < 1$.

角度二 任意型不等式恒成立问题

【例 3-2】已知 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $\ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{ex}$ 恒成立.

解: (1) 由题意知 $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$ 对一切 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 $a \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$,

设 $h(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ ($x > 0$), 则 $h'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$,

① 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

② 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 4$, 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

所以 $a \leq h(x)_{\min} = 4$. 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

(3) 证明: 问题等价于证明

$$x \ln x > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e} \quad (x \in (0, +\infty)).$$

又 $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$, 当 $x \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

设 $m(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ ($x \in (0, +\infty)$), 则 $m'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

易知 $m(x)_{\max} = m(1) = -\frac{1}{e}$, 从而对一切 $x \in (0, +\infty)$, $\ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{ex}$ 恒成立.

角度三 存在型不等式恒成立问题

【例 3-3】已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^x - xe^x$.

(1) 当 $x \in [1, e]$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 当 $a < 1$ 时, 若存在 $x_1 \in [e, e^2]$, 使得对任意的 $x_2 \in [-2, 0]$, $f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$.

① 当 $a \leq 1$ 时, $x \in [1, e]$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 为增函数, $f(x)_{\min} = f(1) = 1 - a$.

② 当 $1 < a < e$ 时, $x \in [1, a]$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 为减函数;

$x \in [a, e]$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 为增函数. 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = a - (a+1)\ln a - 1$.

③ 当 $a \geq e$ 时, $x \in [1, e]$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上为减函数, $f(x)_{\min} = f(e) = e - (a+1) - \frac{a}{e}$. 综上, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = 1 - a$; $1 < a < e$ 时, $f(x)_{\min} = a - (a+1)\ln a - 1$;

$a \geq e$ 时, $f(x)_{\min} = e - (a+1) - \frac{a}{e}$.

(2) 由题意, 知 $f(x)$ ($x \in [e, e^2]$) 的最小值小于 $g(x)$ ($x \in [-2, 0]$) 的最小值.

由(1)知 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调递增,

$f(x)_{\min} = f(e) = e - (a+1) - \frac{a}{e}$. $g'(x) = (1 - e^x)x$, $x \in [-2, 0]$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 为减函数,

$g(x)_{\min} = g(0) = 1$, 所以 $e - (a+1) - \frac{a}{e} < 1$, 即 $a > \frac{e^2 - 2e}{e+1}$, 所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{e^2 - 2e}{e+1}, 1\right]$.

——方法·规律——

导数在不等式问题中的应用问题解题策略

(1) 利用导数证明不等式

若证明 $f(x) < g(x)$, $x \in (a, b)$, 可以构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, 如果 $F'(x) < 0$, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 上是减函数, 同时若 $F(a) \leq 0$, 由减函数的定义可知, $x \in (a, b)$ 时, 有 $F(x) < 0$, 即证明 $f(x) < g(x)$.

(2)利用导数解决不等式的恒成立问题

利用导数研究不等式恒成立问题，首先要构造函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，进而得出相应的含参不等式，从而求出参数的取值范围；也可分离变量，构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题。

【变式训练 3】已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数)。

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设函数 $\varphi(x) = xf(x) + tf'(x) + \frac{1}{e^x}$ ，存在实数 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，使得 $2\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 成立，求实数 t 的取值范围。

解：(1) $\because$ 函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，使得 $2\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 成立，则 $2[\varphi(x)]_{\min} < [\varphi(x)]_{\max}$ 。

$$\because \varphi(x) = xf(x) + tf'(x) + e^{-x} = \frac{x^2 + (1-t)x + 1}{e^x},$$

$$\therefore \varphi'(x) = \frac{-x^2 + (1+t)x - t}{e^x} = -\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}.$$

① 当 $t \geq 1$ 时， $\varphi'(x) \leq 0$ ， $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减， $\therefore 2\varphi(1) < \varphi(0)$ ，即 $t > 3 - \frac{e}{2} > 1$ 。

② 当 $t \leq 0$ 时， $\varphi'(x) > 0$ ， $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增， $\therefore 2\varphi(0) < \varphi(1)$ ，即 $t < 3 - 2e < 0$ 。

③ 当 $0 < t < 1$ 时，若 $x \in [0, t]$ ， $\varphi'(x) < 0$ ， $\varphi(x)$ 在 $[0, t]$ 上单调递减，

若 $x \in (t, 1]$ ， $\varphi'(x) > 0$ ， $\varphi(x)$ 在 $(t, 1]$ 上单调递增，所以 $2\varphi(t) < \max\{\varphi(0), \varphi(1)\}$ ，

$$\text{即 } 2 \cdot \frac{t+1}{e^t} < \max\left\{1, \frac{3-t}{e}\right\}, (*) \text{ 由 (1) 知, } g(t) = 2 \cdot \frac{t+1}{e^t} \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{故 } \frac{4}{e} \leq 2 \cdot \frac{t+1}{e^t} \leq 2, \text{ 而 } \frac{2}{e} \leq \frac{3-t}{e} \leq \frac{3}{e}, \text{ 所以不等式 (*) 无解.}$$

综上所述，存在 $t \in (-\infty, 3-2e) \cup \left[3-\frac{e}{2}, +\infty\right)$ ，使得命题成立。

第十二节 定积分与微积分基本定理

考纲要求：1. 了解定积分的实际背景，了解定积分的基本思想，了解定积分的概念。

2. 了解微积分基本定理的含义。

课前·双基落实

夯基点 扫盲点

知识点一 定积分

1. 定积分的定义

一般地，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，用分点 $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n=b$ ，将区间 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任

取一点 $\xi_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ，作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot$

$f(\xi_i)$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，上述和式无限接近某个_____，

当 $n \rightarrow \infty$ 时，上述和式无限接近某个常数，这个常数叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x) dx$ 。

2. 定积分的相关概念

在 $\int_a^b f(x) dx$ 中， a 与 b 分别叫做积分下限与积分上限，区间 $[a, b]$ 叫做积分区间，函数 $f(x)$ 叫做被积函数， x 叫做积分变量， $f(x) dx$ 叫做被积式。

3. 定积分的性质

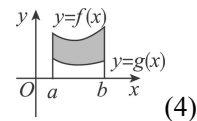
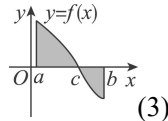
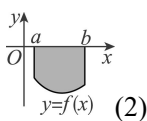
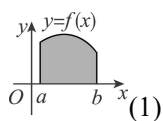
(1) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数)；

(2) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$ ；

(3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (其中 $a < c < b$)。

4. 定积分与曲边梯形面积的关系

定积分的概念是从曲边梯形面积引入的，但是定积分并不一定就是曲边梯形的面积，这要结合具体图形来确定：



设阴影部分面积为 S ，则：

(1) $S = \int_a^b f(x) dx$ ； (2) $S = -\int_a^b f(x) dx$ ； (3) $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$ ；

(4) $S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ 。

5. 变速直线运动的路程公式

做变速直线运动的物体所经过的路程 s ，等于其速度函数 $v=v(t) (v(t) \geq 0)$ 在时间区间 $[a, b]$ 上的定积分，即 $s = \int_a^b v(t) dt$ 。

易误提醒 (1) 若积分式子中有几个不同的参数，则必须先分清谁是被积变量。

(2)定积分式子中隐含的条件是积分上限大于积分下限.

(3)定积分的几何意义是曲边梯形的面积,但要注意:面积非负,而定积分的结果可以为负.

知识点二 微积分基本定理

如果 $F'(x)=f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 **错误!** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, 其中 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个原函数. 可以把 $F(b) - F(a)$ 记为 $F(x)|_a^b$, 即 **错误!** $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

必记结论 运用微积分基本定理求定积分的方法:

(1)对被积函数要先化简, 再求积分.

(2)求被积函数为分段函数的定积分, 依据定积分“对区间的可加性”, 分段积分再求和.

(3)对于含有绝对值符号的被积函数, 要先去掉绝对值号再求积分.

(4)注意用“ $F'(x)=f(x)$ ”检验积分的对错.

课堂·考点突破

攻重点 破难点

考点一定积分的计算

【例 1】计算下列定积分

(1)**错误!** $(\sin x - \cos x)dx$; (2)**错误!** $\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{x}\right)dx$;

(3)**错误!** $|2x-1|dx$; (4)**错误!** $\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x}dx$.

解: (1)**错误!** $(\sin x - \cos x)dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_0^{\pi} \cos x dx = (-\cos x)|_0^{\pi} - \sin x|_0^{\pi} = 2$.

(2)**错误!** $\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 e^{2x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}|_1^2 + \ln x|_1^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + \ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + \ln 2$.

(3)**错误!** $|2x-1|dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x)dx + \int_1^2 (2x-1)dx = (x-x^2)|_{\frac{1}{2}}^1 + (x^2-x)|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(4)**错误!** $\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x} dx$ 表示 $y = \sqrt{-x^2+2x}$ 与 $x=0$, $x=1$ 及 $y=0$ 所围成的图形的面积.

由 $y = \sqrt{-x^2+2x}$, 得 $(x-1)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$,

故 **错误!** $\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x} dx$ 表示圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的面积 $\frac{1}{4}$, 即 **错误!** $\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x} dx = \frac{\pi}{4}$.

——方法·规律——

定积分的求法

(1)用微积分基本定理求定积分，关键是求出被积函数的原函数。此外，如果被积函数是绝对值函数或分段函数，那么可以利用定积分对积分区间的可加性，将积分区间分解，代入相应的解析式，分别求出积分值相加。

(2)根据定积分的几何意义可利用面积求定积分。

(3)若 $y=f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ 。

【变式训练 1】(1)若 $f(x)=x^2+2$ ，则 $\int_0^1 f(x)dx=(\quad)$

- A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

(2) $\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析：(1)设 $\int_0^1 f(x)dx=c$,

则 $c = \int_0^1 (x^2+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2cx\right]_0^1 = \frac{1}{3}+2c$, 解得 $c = -\frac{1}{3}$, 故选 B.

(2) $\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x dx$,

因为 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 的几何意义是单位圆 $x^2+y^2=1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与坐标轴围成区域的面积,

所以 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, 又 $\int_0^1 \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$, 则 $\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4} = \frac{\pi+1}{4}$.

答案：(1)B (2) $\frac{\pi+1}{4}$

考点二利用定积分求平面图形的面积

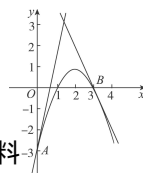
角度一 已知图形求面积

【例 2-1】如图所示，由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其

在点 A(0, -3)和点 B(3, 0)处的切线所围成的图形的面积为_____。

解析：由题意，知抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 在点 A 处的切线斜率是 $k_1=y'|_{x=0}=4$,

在点 B 处的切线斜率是 $k_2=y'|_{x=3}=-2$,



因此，抛物线过点 A 的切线方程为 $y=4x-3$ ，

过点 B 的切线方程为 $y=-2x+6$ 。

设两切线相交于点 M，由 $\begin{cases} y=4x-3, \\ y=-2x+6, \end{cases}$ 消去 y ，得 $x=\frac{3}{2}$ ，即点 M 的横坐标为 $\frac{3}{2}$ 。

在区间 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上，曲线 $y=4x-3$ 在曲线 $y=-x^2+4x-3$ 的上方；

在区间 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上，曲线 $y=-2x+6$ 在曲线 $y=-x^2+4x-3$ 的上方。

因此，所求的图形的面积是

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} [(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2-6x+9)dx = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

答案： $\frac{9}{4}$

角度二 已知函数解析式求曲线围成图形的面积

【例 2-2】由曲线 $y=\sqrt{x}$ ，直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为()

A. $\frac{10}{3}$

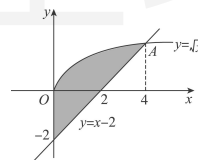
B. 4

C. $\frac{16}{3}$

D. 6

解析：作出曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x-2$ 的草图(如图所示)，

所求面积为阴影部分的面积。由 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x-2 \end{cases}$ 得交点 A(4, 2)。



因此 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x-2$ ，及 y 轴所围成的图形的面积为

错误！ $\int_0^4 (\sqrt{x} - (x-2))dx =$ 错误！ $(\sqrt{x} - x + 2)dx =$

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^4 = \frac{2}{3} \times 8 - \frac{1}{2} \times 16 + 2 \times 4 = \frac{16}{3}, \text{ 故选 C.}$$

答案：C

角度三 已知曲边梯形的面积求参数

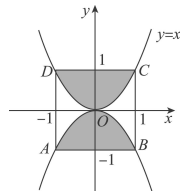
【例 2-3】设 $a>0$ ，若曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=a$ ， $y=0$ 所围成封闭图形的面积为 a^2 ，则 $a=$ _____。

解析：由题意知 错误！ $\int_0^a \sqrt{x}dx = a^2$ ，又 $\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \sqrt{x}$ ，则 $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = a^2$ ，即 $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = a^2$ ，所以 $a = \frac{4}{9}$ 。

答案： $\frac{4}{9}$

角度四 与概率相交汇命题

【例 2-4】正方形的四个顶点 $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$ 分别在抛物线 $y = -x^2$ 和 $y = x^2$ 上, 如图所示. 若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中, 则质点落在图中阴影区域的概率是_____.



解析: 由几何概型的概率计算公式可知, 所求概率 $P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{正方形}}} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$

答案: $\frac{2}{3}$

——方法·规律——

利用定积分求平面图形面积问题的解题策略

- (1) 知图形求面积. 首先, 依据函数的图象求出解析式; 其次, 确立被积函数; 最后, 利用定积分求面积.
- (2) 知函数解析式求面积. 解决此类问题应分四步: ①画图; ②确定积分上、下限, 即求出曲线的交点坐标; ③确定被积函数; ④由定积分求出面积.
- (3) 知图形的面积求参数. 求解此类题的突破口: 画图, 一般是先画出它的草图; 然后确定积分的上、下限, 确定被积函数, 由定积分求出其面积, 再由已知条件可找到关于参数的方程, 从而可求出参数的值.
- (4) 与概率相交汇问题. 解决此类问题应先利用定积分求出相应平面图形的面积, 再用相应概率公式进行计算.

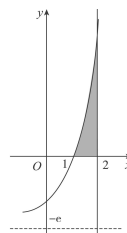
【变式训练 2】(1) 如图, 由函数 $f(x) = e^x - e$ 的图象, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的阴影部分面积等于()

A. $e^2 - 2e - 1$

B. $e^2 - 2e$

C. $\frac{e^2 - e}{2}$

D. $e^2 - 2e + 1$



(2) 由曲线 $f(x) = \sqrt{x}$ 与 y 轴及直线 $y = m (m > 0)$ 围成的图形的面积为 $\frac{8}{3}$, 则 m 的值为()

A. 2

B. 3

C. 1

D. 8

解析: (1) 由已知得 $S = \int_0^2 (e^x - e) dx = (e^x - ex)|_0^2 = (e^2 - 2e) - (e - e) = e^2 - 2e$,

2e,

故选 B.

$$(2) S = \int m^2_0(m - \sqrt{x})dx = \left[mx - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_{m^2_0} = m^3 - \frac{2}{3}m^3 = \frac{8}{3}, \text{ 解得 } m=2, \text{ 故选 } A.$$

答案：(1)B (2)A

考点三定积分在物理中的应用

【例 3】(1)一辆汽车在高速公路上行驶，由于遇到紧急情况而刹车，以速度 $v(t) = 7 - 3t + \frac{25}{1+t}$ (t

的单位：s，v 的单位：m/s)行驶至停止．在此期间汽车继续行驶的距离(单位：m)是()

A. $1 + 25\ln 5$ B. $8 + 25\ln \frac{11}{3}$ C. $4 + 25\ln 5$ D. $4 + 50\ln 2$

(2)已知作用于某一质点的力 $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ (单位：N)，则力 F(x)从 x=0 处运动到 x=2 处(单位：m)所做的功为_____.

解析：(1) $7 - 3t + \frac{25}{1+t} = 0$, $t=4$ 或 $t = -\frac{8}{3} < 0$, 舍去.

错误! $\int \left(7 - 3t + \frac{25}{1+t} \right) dt = \left[7t - \frac{3}{2}t^2 + 25\ln(1+t) \right]_0^4 = 4 + 25\ln 5$, 故选 C.

(2)根据题意，力 F 所做的功为 $W = \text{错误!}x^2 dx + \text{错误!}(x+1)dx = \frac{1}{3}x^3|_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2 = \frac{17}{6} (J)$.

答案：(1)C (2) $\frac{17}{6} J$

——方法·规律——

定积分在物理中的两个应用

(1)求变速直线运动的路程：如果变速直线运动物体的速度为 $v=v(t)$ ，那么从时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的路程 $s = \text{错误!}v(t)dt$.

(2)变力做功：一物体在变力 F(x)的作用下，沿着与 F(x)相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b$ 时，力 F(x)所做的功是 $W = \text{错误!}F(x)dx$.

变式训练 3】一列火车在平直的铁轨上行驶，由于遇到紧急情况，火车以速度 $v(t) = 5 - t + \frac{55}{1+t}$ (t 的单位：s，v 的单位：m/s)紧急刹车至停止．在此期间火车继续行驶的距离是 _____ m.

解析：令 $5 - t + \frac{55}{1+t} = 0$ ，注意到 $t > 0$ ，得 $t=10$ ，即经过的时间为 10 s.

行驶的距离 $s = \int_0^{11} \left(5 - t + \frac{55}{t+1} \right) dt = \left[5t - \frac{1}{2}t^2 + 55 \ln(t+1) \right] \Big|_0^{11} = 55 \ln 11,$

即紧急刹车后火车运行的路程为 $55 \ln 11 \text{ m}$.

答案： $55 \ln 11$

高途课堂整理

高途课堂

扫描下方二维码关注公众号，领取更多资料



学科知识&方法
高效提分



家庭教育
学做好爸妈



教辅资料
免费获取



顶级名师
触手可及



百万社群
经验共享



高中名校试卷库



高中升学宝典



高中答案解析



高中生学习必备

保存或截图本页在微信中扫描即可关注