绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

广东省理科数学模拟试题（二）

本试卷5页，23小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己的县（市、区）、学校、姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid(x-\sqrt{7})(x+3)<0\}$，$B=\{x\mid-2<x<2\sqrt{2}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid-3<x<2\sqrt{2}\}$　　B. $\{x\mid-3<x<\sqrt{7}\}$

C. $\{x\mid-2<x<\sqrt{7}\}$　　D. $\{x\mid-2<x<2\sqrt{2}\}$

2. 已知复数 $z=\mathrm{i}(a-\mathrm{i})$（i为虚数单位，$a\in\mathbf{R}$），若 $1<a<2$，则 $|z|$ 的取值范围为

A. $(\sqrt{2},\sqrt{5})$　　B. $(\sqrt{2},2)$　　C. $(2,\sqrt{5})$　　D. $(1,2)$

3.《周髀算经》是我国古老的天文学和数学著作，其书中记载：一年有二十四个节气，每个节气晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测影子的长度），夏至、小暑、大暑、立秋、处暑、白露、秋分、寒露、霜降是连续的九个节气，其晷长依次成等差数列，经记录测算，这九个节气的所有晷长之和为49.5尺，夏至、大暑、处暑三个节气晷长之和为10.5尺，则立秋的晷长为

A. 1.5尺　　B. 2.5尺　　C. 3.5尺　　D. 4.5尺

4. 在$\triangle ABC$中，已知 $\angle A=45°$，$AB=6\sqrt{2}$，且AB边上的高为$2\sqrt{2}$，则 $\sin C=$

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

5. 一个底面半径为2的圆锥，其内部有一个底面半径为1的内接圆柱，若其内接圆柱的体积为$\sqrt{3}\pi$，则该圆锥的体积为

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

6. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，$f(-3)=0$，则不等式$f(x-1)>0$的解集为

A. $(-3,3)$
B. $(-\infty,-2)\cup(1,4)$
C. $(-\infty,-4)\cup(-1,2)$
D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为$F$，过点$F$分别作双曲线的两条渐近线的垂线，垂足分别为$A$，$B$．若$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

8. 已知四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle A=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，E在CB的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=$

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

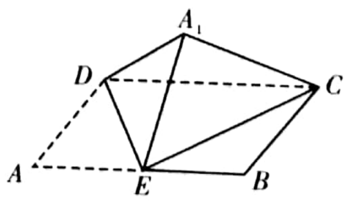
9. $(x+y+2)^6$的展开式中，xy^3的系数为

A. 120　　B. 480　　C. 240　　D. 320

10. 把函数$f(x)=2\sin x$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再把所得的函数图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）得到函数$g(x)$的图象，关于$g(x)$的说法有：①函数$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称；②函数$g(x)$的图象的一条对称轴是$x=-\frac{\pi}{12}$；③函数$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$\sqrt{3}$；④函数$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增．则以上说法正确的个数是

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

11. 如图，在矩形$ABCD$中，已知$AB=2AD=2a$，E是AB的中点，将$\triangle ADE$沿直线DE翻折成$\triangle A_1DE$，连接A_1C．若当三棱锥A_1-CDE的体积取得最大值时，三棱锥A_1-CDE外接球的体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，则$a=$



A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

12. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+\cos x-1$（$a\in\mathbf{R}$），若函数$f(x)$有唯一零点，则$a$的取值范围为

A. $(-\infty,0)$
B. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$
C. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
D. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

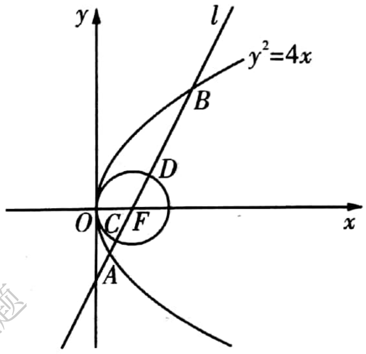
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x , y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-3\leqslant 0, \\ x-y-3\leqslant 0, \\ x+1\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=y-2x$ 的最大值是__________.

14. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$ ，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$ ________.

15. 从正方体的6个面的对角线中，任取2条组成1对，则所成角是60°的有____________对.

16. 如图，直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 且交抛物线于 A,B 两点，直线 l 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 交于 C,D 两点，若 $2|AC|=|BD|$，设直线 l 的斜率为 k ，则 $k^2=$ __________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

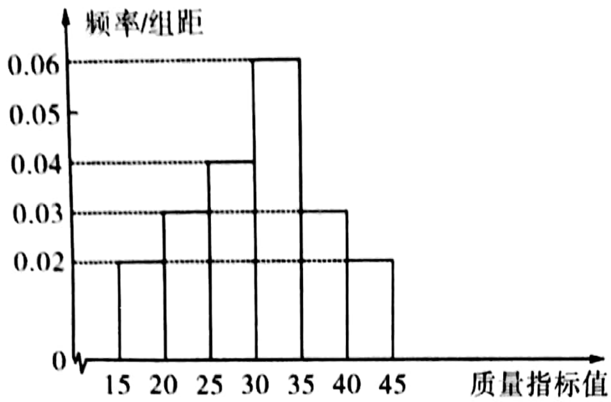
已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\cdot b_{n+1}-a_{n+1}\cdot b_n-2a_n\cdot a_{n+1}=0$ ，且 $a_1=1$, $b_1=1$ ，设 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$.

(1) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_2=3$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

为了提高生产效益，某企业引进了一批新的生产设备，为了解设备生产产品的质量情况，分别从新、旧设备所生产的产品中，各随机抽取 100 件产品进行质量检测，所有产品质量指标值均在（15，45］以内，规定质量指标值大于 30 的产品为优质品，质量指标值在（15，30］的产品为合格品. 旧设备所生产的产品质量指标值如频率分布直方图所示，新设备所生产的产品质量指标值如频数分布表所示.



质量指标值	频数
(15，20]	2
(20，25]	8
(25，30]	20
(30，35]	30
(35，40]	25
(40，45]	15
合计	100

（1）请分别估计新、旧设备所生产的产品的优质品率.

（2）优质品率是衡量一台设备性能高低的重要指标，优质品率越高说明设备的性能越高. 根据已知图表数据填写下面列联表（单位：件），并判断是否有95%的把握认为“产品质量高与新设备有关”.

	非优质品	优质品	合计
新设备产品			
旧设备产品			
合计			

附：

$P(K^2 \geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}，其中 n = a+b+c+d.$$

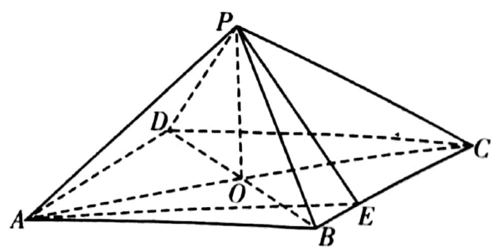
（3）用频率代替概率，从新设备所生产的产品中随机抽取3件产品，其中优质品数为 X 件，求 X 的分布列及数学期望.

19.（12分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$PA = PC$，$BD \perp PA$，E 是 BC 上一点，且 $EC = 3BE$，设 $AC \cap BD = O$.

（1）证明：$PO \perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $\angle BAD = 60°$，$PA \perp PE$，求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.



20．（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，P 是椭圆 C 上一点．若椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $PF_1\perp F_1F_2$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知 O 是坐标原点，向量 $\boldsymbol{m}=(1,1)$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点．若点 $Q(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OQ}\cdot\boldsymbol{m}=1$，$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，求 λ 的最小值．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x-a\ (a<\mathrm{e})$，其中 e 为自然对数的底数．

（1）若函数 $f(x)$ 的极小值为 -1，求 a 的值；

（2）若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+2x-x\ln(x+1)\geqslant 0$ 成立．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=a(a>0)$．

（1）求直线 l 的直角坐标方程；

（2）已知 P 是曲线 C 上的一动点，过点 P 作直线 l_1 交直线 l 于点 A，且直线 l_1 与直线 l 的夹角为 45°，若 $|PA|$ 的最大值为 6，求 a 的值．

23．［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-1|+|x+3|$．

（1）解不等式：$f(x)\leqslant 6$；

（2）若 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=f(x)_{\min}$，证明：$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2\geqslant\frac{49}{3}$．

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

广东省理科数学模拟试题（二）
参考答案及评分标准

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数，选择题不给中间分.

一、选择题

1．C　2．A　3．D　4．B　5．D　6．B

7．D　8．A　9．C　10．C　11．B　12．D

二、填空题

13．6　14．$-\frac{7}{25}$　15．48　16．$12\sqrt{2}+16$

三、解答题

17．**解：**

（1）由 $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n - 2a_n \cdot a_{n+1} = 0$，得 $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 2a_n \cdot a_{n+1}$.

$\therefore \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} = 2$. ………………………… 2 分

$\because c_n = \frac{b_n}{a_n}$，$\therefore c_{n+1} - c_n = 2$.

$\therefore \{c_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列. ………………………… 3 分

又$\because c_1 = \frac{b_1}{a_1} = 1$， ………………………… 4 分

$\therefore c_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$. ………………………… 5 分

（2）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q = \frac{a_2}{a_1} = 3$. ………………………… 6 分

$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 3^{n-1}$. ………………………… 7 分

由（1）知 $c_n=2n-1$，又 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，$\therefore b_n=(2n-1)a_n=(2n-1)3^{n-1}$.

………………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore S_n=1\times3^0+3\times3^1+5\times3^2+\cdots+(2n-1)\times3^{n-1}$，①

$3S_n=1\times3^1+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-1)\times3^n$，② ……………………………… 9 分

①－②得：$-2S_n=1+2\times3^1+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^{n-1}-(2n-1)\times3^n$ ……

………………………………………………………………………………… 10 分

$=1+\frac{2\times3-2\times3^{n-1}\times3}{1-3}-(2n-1)\times3^n$ ………………………… 11 分

$=-2-(2n-2)\times3^n$.

$\therefore S_n=(n-1)\times3^n+1$. ……………………………………………………… 12 分

18．**解：**

（1）估计新设备所生产的产品的优质品率为：$\frac{30+25+15}{100}\times100\%=70\%$，

………………………………………………………………………………… 1 分

估计旧设备所生产的产品的优质品率为：$5\times(0.06+0.03+0.02)\times100\%=55\%$.

………………………………………………………………………………… 2 分

（2）

	非优质品	优质品	合计
新设备产品	30	70	100
旧设备产品	45	55	100
合计	75	125	200

………………………………………………………………………………… 4 分

由列联表可得，$K^2=\frac{200\times(30\times55-45\times70)^2}{75\times125\times100\times100}=4.8>3.841$，

$\therefore$ 有 95% 的把握认为产品质量高与新设备有关. ……………………………… 7 分

（3）X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

$\because$ 由（1）知新设备所生产的优质品率为 0.7，

$\therefore P(X=0)=C_3^0\times(1-0.7)^3\times0.7^0=0.027$，

$P(X=1)=C_3^1\times(1-0.7)^2\times0.7^1=0.189$，

$P(X=2)=C_3^2\times(1-0.7)^1\times0.7^2=0.441$，

$P(X=3)=C_3^3\times(1-0.7)^0\times0.7^3=0.343$. ……………………………… 10 分

$\therefore$ X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

………………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore$ X 的数学期望为 $E(X)=0\times0.027+1\times0.189+2\times0.441+3\times0.343=2.1$.

………………………………………………………………………………… 12 分

19.

(1) **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore O$ 是 AC 的中点，$BD\perp AC$. ………………………………………… 1 分

$\because$ $BD\perp PA$, $PA\cap AC=A$,

$\therefore$ $BD\perp$ 平面 PAC .

$\because$ $PO\subset$ 平面 PAC,

$\therefore$ $BD\perp PO$. ………………………………………………………… 2 分

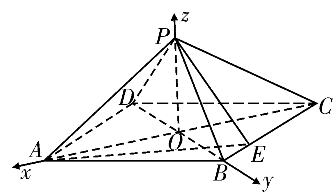
$\because$ $PA=PC$, O 是 AC 的中点,

$\therefore$ $PO\perp AC$. ………………………………………………………… 3 分

$\because$ $AC\subset$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,$AC\cap BD=O$,

$\therefore$ $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………… 4 分

(2) **解：** 由 (1) 知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$, $BD\perp AC$,



$\therefore$ OA,OB,OP 两两互相垂直.

$\therefore$ 以 O 为原点，以 OA,OB,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示.

设四边形 $ABCD$ 的边长为 4 , $PO=a$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60°$, $\therefore$ $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都是等边三角形.

$\therefore$ $OA=OC=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ $P(0,0,a)$, $A(2\sqrt{3},0,0)$, $C(-2\sqrt{3},0,0)$, $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$. ……………… 6 分

$\therefore$ $\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-a)$, $\overrightarrow{PE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-a\right)$, $\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$.

………………………………………………………………………………… 7 分

$\because$ $PA\perp PE$, $\therefore$ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PE}=(2\sqrt{3},0,-a)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-a\right)=0$.

$\therefore$ $-3+a^2=0$.

即 $a=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore \overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-\sqrt{3}\right)$.

设平面 PAE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},\ 0,\ -\sqrt{3})\cdot(x_1,\ y_1,\ z_1)=2\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ \overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{m}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{3}\right)\cdot(x_1,\ y_1,\ z_1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{3}{2}y_1-\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=2$，得 $x_1=1$，$y_1=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. $\therefore \boldsymbol{m}=\left(1,\frac{5\sqrt{3}}{3},2\right)$. ……………………… 9 分

设平面 PEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{3}{2}y_2=0,\\ \overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{3}{2}y_2-\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=-1$，得 $y_2=\sqrt{3}$，$z_2=2$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},2)$. …………………………………………………………… 10 分

设二面角 $A-PE-C$ 的平面角为 θ，

结合图象可知，

$$\cos\theta=-\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\ |\boldsymbol{n}|}\right|=-\left|\frac{\left(1,\ \frac{5\sqrt{3}}{3},\ 2\right)\cdot(-1,\ \sqrt{3},\ 2)}{\sqrt{1^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+2^2}}\right|=-\frac{\sqrt{15}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $A-PE-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………… 12 分

20. **解：**

(1) 依题意可知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$. $\therefore a^2=2b^2$. ………………………………… 1 分

$\because PF_1\perp F_1F_2$，故设 $P(-c,y_0)$，代入椭圆方程得 $y_0=\pm\frac{b^2}{a}$.

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_0|=c\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………… 2 分

联立$\begin{cases} a^2=2b^2, \\ c\cdot\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ c^2=a^2-b^2, \end{cases}$解得 $b=1$，$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}$.

∴ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………… 4 分

（2）由题意可知直线 l 的斜率显然存在，故设直线 l 的方程为：$y=k(x-2)$，

联立$\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$.

$\therefore \Delta=(-8k^2)^2-4(1+2k^2)(8k^2-2)>0$. ………………………………… 6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，∴ $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}$. ………… 7 分

∵ $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，∴ $(x_1+x_2,y_1+y_2)=\lambda(x,y)$.

当 $k=0$ 时 $\lambda=0$，

当 $\lambda\neq0$ 时，$x=\dfrac{x_1+x_2}{\lambda}=\dfrac{8k^2}{\lambda(1+2k^2)}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}[k(x_1+x_2)-4k]=$

$\dfrac{-4k}{\lambda(1+2k^2)}$， ……………………………………………………………………… 8 分

∵ $\overrightarrow{OQ}\cdot\boldsymbol{m}=1$，∴ $x+y=1$. ∴ $\dfrac{8k^2}{\lambda(1+2k^2)}+\dfrac{-4k}{\lambda(1+2k^2)}=1$.

∴ $\lambda=\dfrac{8k^2-4k}{(1+2k^2)}=4\left(1-\dfrac{k+1}{1+2k^2}\right)$ ………………………………………… 9 分

$=4\left(1-\dfrac{k+1}{2(k+1)^2-4(k+1)+3}\right)=4\left(1-\dfrac{1}{2(k+1)+\dfrac{3}{k+1}-4}\right)$

$\geqslant 4-\dfrac{4}{2\sqrt{6}-4}=2-\sqrt{6}$. ………………………………………………… 11 分

当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1$ 时取等号，且 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1$ 满足 $\Delta>0$，所以 $\lambda\geqslant2-\sqrt{6}$.

综上，$\lambda_{\min}=2-\sqrt{6}$. …………………………………………………………… 12 分

21. **解：**

（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=ae^x-e$， ………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立，

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减. ∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无极值. ……… 2 分

当 $0 < a < e$ 时，令 $f'(x) > 0$，得 $x > \ln\frac{e}{a}$.

$\therefore$ 当 $x \in \left(\ln\frac{e}{a}, +\infty\right)$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x \in \left(-\infty, \ln\frac{e}{a}\right)$ 时，$f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\frac{e}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\ln\frac{e}{a}, +\infty\right)$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x = \ln\frac{e}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 -1. ………………………………………… 3 分

$\therefore f\left(\ln\frac{e}{a}\right) = ae^{\ln\frac{e}{a}} - e\ln\frac{e}{a} - a = -1$，即 $e\ln a - a + 1 = 0$. …………… 4 分

令 $m(x) = e\ln x - x + 1 (0 < x < e)$，则 $m'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$.

$\because 0 < x < e$，$\therefore m'(x) > 0$. $\therefore m(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增.

又 $\because m(1) = 0$，$\therefore a = 1$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) $\because a = 1$，$\therefore f(x) = e^x - ex - 1$.

$\therefore f(x) + 2x - x\ln(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x + (2-e)x - 1 - x\ln(x+1) \geqslant 0$.

令 $g(x) = e^x - x^2 + (2-e)x - 1 (x \geqslant 0)$，$\therefore g'(x) = e^x - 2x + 2 - e$.

……………………………………………………………………………………………………… 7 分

令 $h(x) = e^x - 2x + 2 - e (x \geqslant 0)$，$\therefore h'(x) = e^x - 2$.

令 $h'(x) > 0$，得 $x > \ln 2$.

$\therefore$ 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时，$h'(x) > 0$；当 $x \in [0, \ln 2)$ 时，$h'(x) < 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x = \ln 2$ 时，$h(x)$ 取得极小值. ………………………………………………… 8 分

又 $\because h(0) = 3 - e > 0$，$h(1) = 0$，$\therefore$ 存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$ 使得 $h(x_0) = 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[0, x_0)$ 单调递增，在 $(x_0, 1)$ 单调递减，在 $[1, +\infty)$ 单调递增.

又 $\because g(0) = g(1) = 0$，$\therefore g(x)_{\min} = 0$.

$\therefore$ 当 $x \geqslant 0$ 时，$e^x - x^2 + (2-e)x - 1 \geqslant 0$，即 $e^x + (2-e)x - 1 \geqslant x^2$.

……………………………………………………………………………………………………… 9 分

令 $q(x) = x - \ln(x+1) (x \geqslant 0)$，则 $q'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \geqslant 0$ 对于 $x \geqslant 0$ 恒成立.

$\therefore q(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore q(x) \geqslant q(0) = 0$，即当 $x \geqslant 0$ 时，$x \geqslant \ln(x+1)$. ……………………… 11 分

$\therefore$ 当 $x \geqslant 0$ 时，$x^2 \geqslant x\ln(x+1)$.

$\therefore$ 当 $x \geqslant 0$ 时，$e^x + (2-e)x - 1 \geqslant x^2 \geqslant x\ln(x+1)$.

$\therefore$ 当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) + 2x - x\ln(x+1) \geqslant 0$. ………………………………… 12 分

22. **解:**

(1) 由 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a$, 得 $\sqrt{2}\rho\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = a$. ………… 1 分

$\therefore \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = a$.

$\because x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, …………………………………………………… 2 分

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x + y = a$, 即 $x + y - a = 0$. ………………… 3 分

(2) 依题意可知曲线 C 的参数方程为: $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数) ………… 4 分

设 $P(2\sqrt{3}\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 则点 P 到直线 l 的距离为:

$d = \dfrac{|2\sqrt{3}\cos\alpha + 2\sin\alpha - a|}{\sqrt{2}}$ ……………………………………………… 5 分

$= \dfrac{\left|4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - a\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - a\right|}{\sqrt{2}}$. ……………………… 6 分

$\because a > 0$, $\therefore$ 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ 时, $d_{\max} = \dfrac{|-4-a|}{\sqrt{2}}$. …………………… 7 分

依题意得 $|PA| = \sqrt{2}d$. ………………………………………………………… 8 分

$\therefore |PA|$ 的最大值为 $\sqrt{2}d_{\max} = 6$, 即 $\sqrt{2} \times \dfrac{|-4-a|}{\sqrt{2}} = 6$. ………………… 9 分

$\because a > 0$, $\therefore$ 解得 $a = 2$. …………………………………………………… 10 分

23. **解:**

(1) $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x < -3, \\ 4, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x+2, & x > 1. \end{cases}$ ……………………………………………… 2 分

当 $x < -3$ 时, $-2x - 2 \leqslant 6$, 即 $x \geqslant -4$, 解得: $-4 \leqslant x < -3$;

当 $-3 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $4 \leqslant 6$, 满足题意;

当 $x > 1$ 时, $2x + 2 \leqslant 6$, 即 $x \leqslant 2$, 解得: $1 < x \leqslant 2$. …………………… 4 分

综上, 不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集为 $\{x \mid -4 \leqslant x \leqslant 2\}$. ……………………… 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)_{\min} = 4$, $\therefore a + b + c = 4$. ……………………………… 6 分

$\therefore (a+1) + (b+1) + (c+1) = 7$.

$\therefore [(a+1) + (b+1) + (c+1)]^2 = 49$. ………………………………………… 7 分

$\therefore 49 = (a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 + 2(a+1)(b+1) + 2(a+1)(c+1) +$

$2(b+1)(c+1)$

$\leqslant 3[(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2]$, ………………………………………… 8 分

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{4}{3}$ 时等号成立. ………………………………………… 9 分

$\therefore (a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2 \geqslant \dfrac{49}{3}$. ………………………………………… 10 分