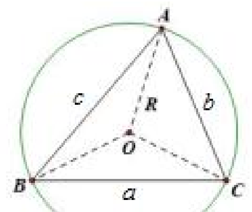
高中数学解答题常考公式及答题模板

（文理通用）　嬴本德



题型一：解三角形

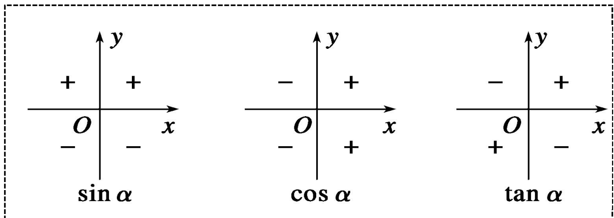
1、正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　（R 是 ΔABC 外接圆的半径）

变式①：$\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$　变式②：$\begin{cases}\sin A=\dfrac{a}{2R}\\ \sin B=\dfrac{b}{2R}\\ \sin C=\dfrac{c}{2R}\end{cases}$　变式③：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

2、余弦定理：$\begin{cases}a^2=b^2+c^2=2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$　变式：$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}$

3、面积公式：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

4、射影定理：$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\ b=a\cos C+c\cos A\\ c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$　（少用，可以不记哦^o^）



5、三角形的内角和等于180°，即 $A+B+C=\pi$

6、诱导公式：奇变偶不变，符号看象限

奇：$\dfrac{\pi}{2}$ 的奇数倍

偶：$\dfrac{\pi}{2}$ 的偶数倍

利用以上关系和诱导公式可得公式：$\begin{cases}\sin(A+B)=\sin C\\ \sin(A+C)=\sin B\\ \sin(B+C)=\sin A\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\cos(A+B)=-\cos C\\ \cos(A+C)=-\cos B\\ \cos(B+C)=-\cos A\end{cases}$

7、平方关系和商的关系：① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　② $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

8、二倍角公式：① $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$　⇒ 降幂公式：$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

③ $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

8、和、差角公式：

① $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$　② $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

③ $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$

9、基本不等式：① $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$　$(a,b\in R^+)$　② $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$　$(a,b\in R^+)$　③ $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$　$(a,b\in R)$

注意：基本不等式一般在求取值范围或最值问题中用到，比如求 ΔABC 面积的最大值时。

☞**答题步骤：**

①抄条件：先写出题目所给的条件；（但不要抄题目）

②写公式：写出要用的公式，如正弦定理或余弦定理；

③有过程：写出运算过程；

④得结论：写出结论；（不会就猜一个结果）

⑤猜公式：第二问一定不能放弃，先写出题目所给的条件，然后再写一些你认为可能考到的公式，如均值不等式或面积公式等。

例1：(2016天津文)在 ΔABC 中，内角A、B、C所对应的边分别为a、b、c，已知 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$.

(1)求B；

(2)若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$，求$sinC$的值.

解：已知 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$　……将题目的条件抄一遍

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　……写出要用的公式

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$　……写出要用的公式

$\Rightarrow \sin A\cdot 2\sin B\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin A$

$\because \sin A\ne 0,\sin B\ne 0$　……写出运算过程

$\Rightarrow 2\cos B=\sqrt{3}\Rightarrow \cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

又 $\because 0<B<\pi$　故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.　……写出结论

(2)已知 $\cos A=\dfrac{1}{3},A+B+C=\pi$　……写出题目的条件和要用的公式

$\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$　……先写公式再写运算过程

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

例 2：(2013 江西理)在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $a+c=1$，求 b 的取值范围.

解：(1)已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$　……将题目的条件抄一遍

$\Rightarrow -\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

$\Rightarrow -\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A os B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$　……写出必要的运算过程

$\Rightarrow \sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

$\because \sin A\neq 0\Rightarrow \sin B=\sqrt{3}\cos B\Rightarrow \tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$

$0<B<\pi\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$.　……得出结论

(2)由余弦定理，得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　……写出要用的公式

$=a^2+c^2-2ac\cdot\dfrac{1}{2}$　……写出必要的运算过程

$=(a+c)^2-3ac$

根据基本不等式 $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，得　……写出要用的公式

$b^2=(a+c)^2-3ac\ge 1-3\cdot\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2=1-3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$　……写出必要的运算过程

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\le b<a+c=1$

即 $b\in[\dfrac{1}{2},1)$.　……得出结论

10、不常用的三角函数公式（很少用，可以不记哦^o^）

（1）万能公式：

①$\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$　②$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$　③$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

（2）三倍角公式：

①$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$　②$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　③$\tan 3\theta=\dfrac{\tan^3\theta-3\tan\theta}{3\tan^2\theta-1}$

题型二：数列

1、等差数列

①定义：$a_{n+1}-a_n=d$

②通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=a_m+(n-m)d\Rightarrow d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$

③前 n 项和：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$（大题小题都常考）

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$（小题常考）

④等差中项：若 A,B,C 成等差数列，则 $2B=A+C$

⑤性质：若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

2、等比数列

①定义：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$

②通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}\Rightarrow a_n=a_mq^{n-m}$

③前 n 项和：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$（常考）

$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$（可以不记哦^o^）

④等比中项：若 A,B,C 成等比数列，则 $B^2=A\cdot C$

⑤性质：若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

3、a_n 与 S_n 的关系：$a_n=\begin{cases}S_1 & ,n=1\\ S_n-S_{n-1} & ,n\ge 2\end{cases}$

注意：该公式适用于任何数列，常利用它来求数列的通项公式

4、求数列通项公式的方法

（1）公式法：

①若已知 $a_{n+1}-a_n=d$ 和 $a_1=a$，则用等差数列通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

②若已知 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 和 $a_1=a$，则用等比数列通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$

（2）a_n 与 S_n 的关系：$a_n=\begin{cases}S_1 & ,n=1\\ S_n-S_{n-1} & ,n\ge 2\end{cases}$

例 3：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{2}$，求 a_n.

解：设 $S_n=a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{2}$，则

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}$

（2）当 $n\ge 2$ 时，$S_n=a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}+3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{2}$　①

$S_{n-1}=a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=\dfrac{n-1}{2}$　②

①-②，得

$3^{n-1}a_n=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}\quad(n\ge 2)$　……利用了 a_n 与 S_n 的关系

验证当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{2}$　……要验证 n=1 是否成立，不成立应当分开写

故 $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}$.

（3）构造法：形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p，q 为非零常数） 构造等比数列 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$

例 4：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+1$，且 $a_1=1$，求 a_n.

解：已知 $a_{n+1}=2a_n+1$，且 $a_1=1$

构造 $a_{n+1}+\lambda=2(a_n+\lambda)$　　……构造等比数列

$\Rightarrow a_{n+1}+\lambda=2a_n+2\lambda\Rightarrow a_{n+1}=2a_n+\lambda$

$\therefore\lambda=1$　　……将假设出来的式子与原式比较，求出未知数 λ

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$

令 $b_n=a_n+1\Rightarrow b_1=a_1+1=2$

$\Rightarrow\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2=q\Rightarrow\{b_n\}$ 为等比数列

$\therefore b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n$　　……先写出等比数列的通项公式，再带值

（4）累加法：形如 $a_n=a_{n-1}+f(n)$，且 $f(n)$ 可用求和，可用累加法

例 5：已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2n$，求 a_n.

解：已知 $a_n=a_{n-1}+2n$

$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2n$

$a_2-a_1=2\times2$

$a_3-a_2=2\times3$

$a_4-a_3=2\times4$

$a_5-a_4=2\times5$　　……累加的方法是左边加左边，右边加右边

.

$a_{n-1}-a_{n-2}=2(n-1)$

$a_n-a_{n-1}=2n$

累加后，得

$a_n-a_1=2\times(2+3+4+5+\cdots+n)$

$=2\times(1+2+3+\cdots+n)-2$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-2$　　……利用了公式 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=n^2+n-2$

故 $a_n=n^2+n-1$.

（5）累乘法：形如 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$，且 $f(n)$ 可用求积，可用累乘法

例 6：已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n+1}$，求 a_n.

解：已知 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n+1}$

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{3},\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{3}{4},\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{4}{5}\cdots\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n-1}{n},\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n+1}$

累乘后，得

$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{2}{n+1}\Rightarrow a_n=\dfrac{2}{n+1}$.

（6）取倒数法：形如 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{pa_{n-1}+q}$（$p$，$q$ 为非零常数）则两边同时取倒数

例 7：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$ 且 $a_1=1$，求 a_n.

解：已知 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=2+\dfrac{1}{a_{n-1}}$　　……等式两边同时取倒数

$\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2$　　……满足等差数列的定义

令 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，则 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$　　……构造等差数列

$b_n-b_{n-1}=2=d\Rightarrow\{b_n\}$ 为等差数列

$\therefore b_n=b_1+(n-1)d=1+(n-1)\cdot2=2n-1$.　　……先写出公式，再带值

5、求数列前 n 项和 S_n 的方法

（1）公式法：除了用等差数列和等比数列前 n 项和的公式外，还应当记住以下求和公式

①$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　　④$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$

②$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$　　⑤$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$　　⑥$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

（2）裂项相消法：

① $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　　③ $\frac{1}{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

② $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$　　④ $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

例 8：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）已知 $S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$　　……写出题目所给的条件

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$a_n=a_1+(n-1)d$　　……一定要先写出要用的公式，再带值

$$\begin{cases}S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=4a_1+6d\\ S_2=2a_1+\frac{2\times1}{2}d=2a_1+d\end{cases}\Rightarrow 4a_1+6d=4(2a_1+d)\quad ①$$

$a_{2n}=a_1+(2n-1)d=2[a_1+(n-1)d]+1$　②　　……先写出公式，再带值

由①②式，解得 $a_1=1,d=2$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\cdot2=2n-1$.　　……先写出公式，再带值

（2）由（1）知：$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$　　……拆项后担心不对就通分回去验证

$$\Rightarrow T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}.$$

（3）错位相减法：形如“$a_n=$等差×等比”的形式可用错位相减法

例 9：设数列满足 $a_1=2,a_{n+1}-a_n=3\cdot2^n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）已知 $a_1=2,a_{n+1}-a_n=3\cdot2^n$，则　　……一定要先写出题目所给的条件

$a_2-a_1=3\cdot2$

$a_3-a_2=3\cdot2^2$

$a_4-a_3=3\cdot2^3$

.

$a_n-a_{n-1}=3\cdot2^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=3\cdot2^n$

累加后，得

$$a_{n+1}-a_1=3(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$$
$$=3\cdot\frac{2(1-2^n)}{1-2}$$　　……运用等比数列求和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
$$=-6(1-2^n)=6\cdot2^n-6$$

$\Rightarrow a_{n+1}=6\cdot2^n-4\Rightarrow a_n=6\cdot2^{n-1}-4$.　　……所有的 n 取 $n-1$，得到 a_n

（2）由（1）知：$b_n=na_n=6n\cdot2^{n-1}-4n=3n\cdot2^n-4n$

$$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$$
$$=(3\cdot1\cdot2^1-4\cdot1)+(3\cdot2\cdot2^2-4\cdot2)+(3\cdot3\cdot2^3-4\cdot3)+\cdots+(3n\cdot2^n-4n)$$
$$=3(1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n)-4(1+2+3+\cdots+n)$$

记 $H_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot2^n$　①

$2H_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$　②　　……等式两边同时乘以等比部分的公比

①-②，得　　……此处用错位相减法

$$-H_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$$
$$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$$
$$\Rightarrow H_n=2(1-2^n)+n\cdot2^{n+1}$$

$\therefore T_n=3H_n-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}=6(1-2^n)+3n\cdot2^{n+1}-4n(n+1)$.　　……运用求和公式 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

（4）分组求和法：

例 10：已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_2+a_4=8$.

（1）若 a_1, a_3, a_m 成等比数列，求 m 的值；

（2）设 $b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）已知 $a_1=2, a_2+a_4=8$　　……写出题目所给的条件

由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $a_2+a_4=(a_1+d)+(a_1+3d)=2a_1+4d=8$

$\Rightarrow a_1+2d=4 \Rightarrow d=1$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=n+1$.　　……先写出通项公式的一般式，再带值

$$\therefore \begin{cases} a_3=a_1+3d=4 \\ a_m=a_1+(m-1)d=m+1 \end{cases}$$

又 $\because$ a_1, a_3, a_m 成等比数列　　……利用等比中项列出方程

$a_3^2=a_1a_m \Rightarrow 4^2=2(m+1) \Rightarrow m=7$.

（2）由（1）知：$b_n=a_n+2^{a_n}=n+1+2^{n+1}$

$$\begin{aligned} S_n &= b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n \\ &= (1+1+2^2)+(2+1+2^3)+(3+1+2^4)+\cdots+(n+1+2^{n+1}) \\ &= (1+2+3+\cdots+n)+n+(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}) \end{aligned}$$　　……运用分组求和法

记 $H_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$G_n=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}=\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}=4\cdot 2^n-4=2^{n+2}-4$，则

$S_n=H_n+n+G_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+2^{n+2}-4$.

9、基本不等式：

① $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$　$(a,b\in R^+)$　② $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$　$(a,b\in R^+)$　③ $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$　$(a,b\in R)$

注意：基本不等式一般在求取值范围或最值问题的时候用到，有时还用于证明数列不等式。

☞答题步骤：

①抄条件：先抄题目所给的条件；（但不要抄题目）

②写公式：写出要用的公式，如等差数列的通项公式或前 n 项和；

③有过程：写出运算过程；

④得结论：写出结论；（不会就一个结果）

⑤猜公式：第二问一定不能放弃，先写出题目所给的条件，然后再写一些你认为可能考到的公式。

^o^ 数列题型比较难的是放缩法

题型三：空间立体几何

1、线线关系

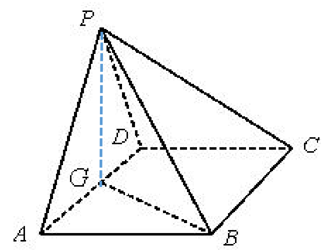
①线线平行：（很简单，基本上不考）

②线线垂直：先证明线面垂直，从而得到线线垂直。（常考）

方法：（i）利用面与面垂直的性质，即一个平面内的一条直线垂直于两面交线必与另一平面垂直；

（ii）利用线与面垂直的性质，即直线同时垂直于平面内的两条相交直线。

例 11：如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB=60^0$ 且边长为 a 的菱形，侧面 PAD 是等边三角形，且平面 PAD 垂直于底面 $ABCD$，求证：$AD\perp PB$.



证明：取 AD 的中点为 G，连接 PG，BG，如图所示：　　……作辅助线一定要有说明

ΔPAD 是等边三角形 $\Rightarrow PG\perp AD$　①　　……将条件圈出来

$$\begin{cases} AG=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2} \\ \angle DAB=60^\circ,\ AB=a \end{cases} \Rightarrow AG\perp BG \Rightarrow AD\perp BG \quad ②$$　　……将条件圈出来

又 $\because PB\subset$ 面PBG

而 $AD\not\subset$ 面PBG $\Rightarrow AD\perp$ 面PBG　　……必须说明线与面的关系

即 $AD\perp PB$.

2、线面关系

①线面平行：只需证明直线与平面内的一条直线平行即可。方法：将直线平移到平面中，得到平面内的一条直线，只需证明它们互相平行即可。一般要用平行四边形或三角形中位线的性质证明。（最常考，一定要掌握鸭）

②线面垂直：只需证明直线与平面内的两条相交直线都互相垂直即可。（最常考，一定要掌握鸭）

方法：（i）利用面与面垂直的性质；

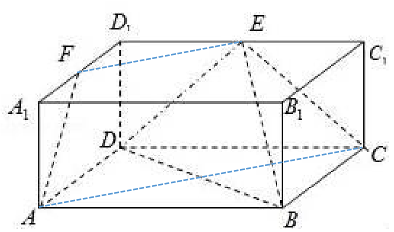
（ii）直线同时垂直于平面内的两条相交直线。

例 12：如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=a$，$AB=2a$，E、F 分别为 C_1D_1、A_1D_1 的中点.

（1）求证：DE⊥平面 BCE；

（2）求证：AF∥平面 BDE.

证明：（1）已知 $AA_1=AD=a$，$AB=2a$，E 为 C_1D_1 的中点



$\therefore DE=EC=\sqrt{2}a \Rightarrow DE^2+EC^2=CD^2$

$DE\perp EC$　①

又$\because BC\perp$面$CDD_1C_1 \Rightarrow BC\perp DE$　②

$BC,EC\subset$面BCE，且 $BC\cap EC=C$

而 $DE\not\subset$面$BCE \Rightarrow DE\perp$面BCE.

（2）连接 EF，连接 AC 交 BD 于点 M 如图所示：

$$\begin{cases} EF \underset{=}{//} \frac{1}{2}A_1C_1 \\ AM=\frac{1}{2}AC \Rightarrow EF \underset{=}{//} AM \Rightarrow \text{四边形}AMEF\text{为平行四边形} \\ AC \underset{=}{//} A_1C_1 \end{cases}$$

$\therefore AF // ME$　③

又$\because ME\subset$面BDE，而$AF\not\subset$面BDE

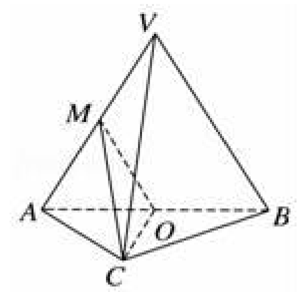
$\Rightarrow AF //$面BDE.

3、面面关系

①面面平行：只需证明第一个平面的两条相交直线与第二个平面的两条相交直线互相平行即可（很少考哦）。

②面面垂直：只需证明有一条直线垂直于一个平面，而这条直线又恰好在另外一个平面内即可。（常考）

例 13：如图，在三棱锥 V-ABC 中，平面 VAB⊥平面 ABC，△VAB 为等边三角形，AC⊥BC 且 AC=BC，O，M 分别为 AB，VA 的中点．求证：平面 MOC⊥平面 VAB.



证明：已知面 VAB⊥面 ABC

$\begin{cases} AC=BC \\ AO=OB \end{cases} \Rightarrow CO\perp$面$VAB$　①　　……将条件圈出来

又$\because CO\subset$面MOC

$\Rightarrow$面$MOC\perp$面VAB.　　……利用了线垂直于平面的性质

☞答题模板：

①作辅助：需要作辅助线的一定要在图中作出辅助线，如取 AB 的中点为 E；

②有说明：需要在图上连线时一定要有说明，如连接 AB 两点如图所示；

③抄条件：写出证明过程，并将条件圈出；

④再说明：说明线与面的关系，如 $AB\subset$面 ABC，而 $EF\not\subset$面 ABC；

⑤得结论：得出结论，证毕；

⑥写多分：第二问不要不写，能写多少写多少，哪怕是抄题目的条件。

文科常考锥体体积公式：$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

理科常考二面角的余弦值：$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}$　其中 $\vec{n}$ 和 $\vec{m}$ 为两个平面的法向量

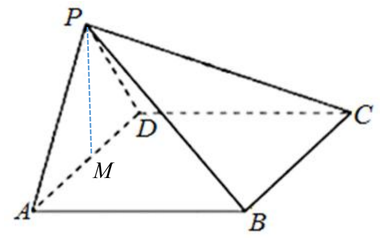
点到平面的距离公式(理科)：设平面的法向量为 $\vec{n}$，A 为该平面内任意一点，则点 P 到平面的距离为：$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

^o^ 总之第二问一定要多写，多写多得分

例 14：(2018 全国Ⅱ卷文)如图所示，在四棱锥 P−ABCD 中，AB//CD，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$．

（1）证明：平面 PAB⊥平面 PAD；

（2）若 PA=PD=AB=DC，$\angle APD=90^\circ$，且四棱锥 P−ABCD 的体积为 $\frac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积.



证明：（1）$\because \angle BAP=\angle CDP=90^\circ$　　　　……写出题目的已知条件

$$\Rightarrow \begin{cases} AB\perp AP \\ CD\perp PD \end{cases} \quad ①$$

又 $\because AB\,//\,CD\Rightarrow AB\perp PD$　②　　　　……将证明的条件圈出来

$AP,PD\subset 面PAD,且AD\cap PD=D$

$而AB\not\subset 面PAD$　　　　……说明清楚线与面的关系

$\Rightarrow AB\perp 面PAD$

又 $\because AB\subset 面PAB\Rightarrow 面PAB\perp 面PAD$．　　　　……根据线面垂直的性质，得出结论

（2）过 P 点作 $PM\perp AD$，垂足为点 M，如图所示：　　　　……作辅助线一定要有说明

$AB\perp 面PAD\Rightarrow AB\perp PM$　③

$\because PM\perp AD$　④

$\Rightarrow PM\perp 面ABCD$

设 $AB=a$，则 $AD=\sqrt{2}a, PM=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot AD\cdot PM=\frac{1}{3}a^3$　　　　……平行四边形的面积等于相邻两边的乘积

由题意可知：$\frac{1}{3}a^3=\frac{8}{3}\Rightarrow a=2$

$\therefore PA=PD=2, AD=BC=2\sqrt{2}, PB=PC=2\sqrt{2}$

故四棱锥 P-ABCD 的侧面积为：

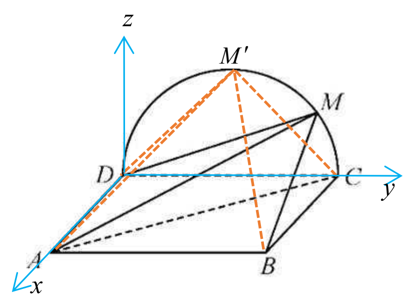
$S_{侧}=S_{\Delta PAD}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta ACD}+S_{\Delta PBC}$　　　　……要先将所有的侧面积表示出来，再相加

$=PA\cdot PD\cdot\frac{1}{2}+PA\cdot AB\cdot\frac{1}{2}+PD\cdot CD\cdot\frac{1}{2}+BC\cdot BC\sin 60^\circ\cdot\frac{1}{2}=6+2\sqrt{3}$．

例 15：(2018 全国Ⅲ卷理)如图所示，边长为 2 的正方形 ABCD 所在的平面与半圆弧 CD 所在平面垂直，M 是 CD 上异于 C，D 的点.

（1）证明：平面 AMD⊥平面 BMC；

（2）当三棱锥 M−ABC 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



证明：（1）既然 M 为圆弧 CD 上的动点，不妨假设 M 在圆弧 CD 的中点 M' 处，建立空间直角坐标系 D−xyz 如图所示：

$A(2,0,0)$　$B(2,2,0)$　$C(0,2,0)$　$D(0,0,0)$　$M'(0,1,1)$　　　　……将所有点的坐标一一写出

设面 ADM' 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则　　　　……法向量一般要先假设出来

$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DM'}=(0,1,1)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+0+0=0\\ 0+y_1+z_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ y_1+z_1=0\end{cases}$　取 $\vec{n}=(0,1,-1)$　　　　……平面有无数多法向量，任取一个即可

设面 BCM' 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\overrightarrow{BM'}=(-2,-1,1)$，$\overrightarrow{CM'}=(0,-1,1)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BM'}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CM'}\cdot\vec{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2-y_2+z_2=0\\ 0-y_2+z_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_2+y_2-z_2=0\\ y_2-z_2=0\end{cases}$　取 $\vec{m}=(0,1,1)$

$\therefore \vec{n}\cdot\vec{m}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\times0+1\times1+(-1)\times1=0$

$\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{m}\Rightarrow 面ADM'\perp 面BCM'$　　　　……平面的法向量垂直，两平面必互相垂直

即 面 ADM⊥面 BCM.

（2）由题意知，当 M 在点 M' 处时三棱锥 M−ABC 体积最大

设面 ABM' 的法向量为 $\vec{k}=(x,y,z)$，则

$\overrightarrow{AM'}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{BM'}=(-2,-1.1)$

由 $\begin{cases}\vec{k}\cdot\overrightarrow{AM'}=0\\ \vec{k}\cdot\overrightarrow{BM'}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+z=0\\ -2x-y+z=0\end{cases}$ 取 $\vec{k}=(1,0,2)$

而面 CDM' 的法向量取为 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{k}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\vec{k}|\cdot|\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{1\times2+0\times0+2\times0}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+0^2}}=\dfrac{1}{\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5}{5}$ ……先写公式再带数值

$\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt5}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt5}{5}$. ……利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求 $\sin\alpha$

题型四：概率与统计

1、茎叶图

①平均数：$\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$

②极差=最大值-最小值 注：极差越小，数据越集中

③方差：$s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]$ 注：方差越小，数据波动越小，越稳定

④标准差：$s=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]}$

例 16：(2018 全国Ⅲ卷理)某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人。第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

（1）根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高？并说明理由；

（2）求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表：

	超过 m	不超过 m
第一章生产方式		
第二章生产方式		

（3）根据（2）中的列联表，能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解：（1）工作效率的高低看两种生产方式的平均工作时间，分别为：

第一种生产方式：$\overline{X}_1=\dfrac{1}{20}\times(68+72+76+\cdots+92)=84(\text{min})$

第二种生产方式：$\overline{X}_2=\dfrac{1}{20}\times(65+65+66+\cdots+90)=74.7(\text{min})$

由 $\overline{X}_2<\overline{X}_1$ 可知第二种生产方式的平均工作时间较低，因此第二种生产方式效率更高.

（2）由茎叶图可知：中位数为 $m=\dfrac{79+81}{2}=80$

列联表如下：

	超过 m	不超过 m
第一章生产方式	15	5
第二章生产方式	5	15

（3）由（2）中的列联表知：

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{40(15\times15-5\times5)}{(15+5)(5+15)(15+5)(5+15)}=10>6.635$ ……要将公式抄写一遍，再带值

所以有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异.

2、频率分布直方图

①众数：最高小长方形的中间值

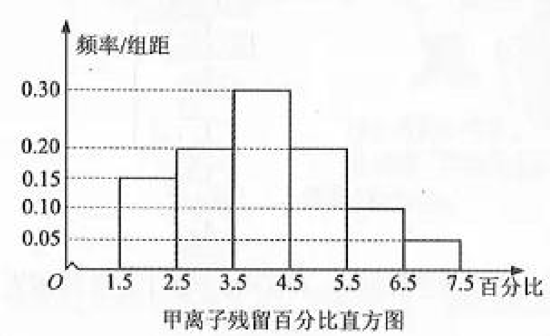
②中位数：小长方形的面积之和等于 0.5 处所对应的值

③频率=概率=组距×$\frac{频率}{组距}$=小长方形的面积

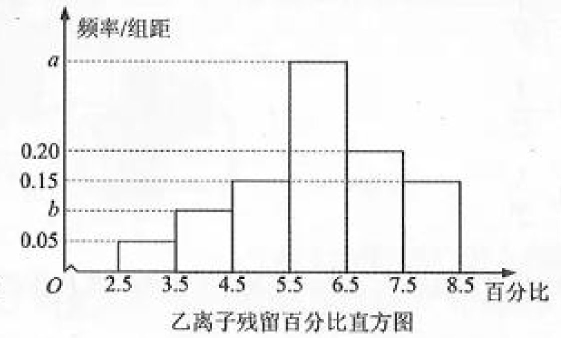
④所有小长方形的面积之和等于 1

⑤平均数：每个小长方形的中间值×相应小长方形的面积，然后将所得的数相加

例 17：(2019 全国Ⅲ卷文)为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下实验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液.每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同.经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比.根据试验数据分析得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”，根据直方图得到 P(C)的估计值为 0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a，b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中间值为代表）.

解：（1）频率分布直方图的小矩形面积表示概率.

由题意，得

a+0.20+0.15=0.70 ⇒ a=0.35

根据“各小矩形的面积之和等于 1”，得

0.05+b+0.15+0.35+0.20+0.15=1 ⇒ b=0.10

（2）根据平均值的求法，得

对甲离子：$\bar{x}=2\times0.15+3\times0.20+4\times0.30+5\times0.20+6\times0.10+7\times0.05=4.05$

对乙离子：$\bar{y}=3\times0.05+4\times0.10+5\times0.15+6\times0.35+7\times0.20+8\times0.15=6.00$

3、线性回归方程

☞答题模板：

（1）设方程：先假设设回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）抄公式：写出公式 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$ （不管题目有没有给，都要写出来哦^o^）

（3）求各值：求出① $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$，② $\bar{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n)$ ……没时间计算就把式子列出来

③ $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\cdots+x_ny_n$，④ $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2$ ……没时间计算就把式子列出来

（4）得 ba：代入公式求出 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$；

（5）写方程：写出回归方程；

（6）写多分：第二问也不难，一般给你 x 让你估计 y 的值，直接带公式 OK！^o^

例 18：(2014 全国Ⅱ卷理)某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭纯收入 y（单位：千元）的数据如下表：

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

（1）求 y 关于 t 的线性回归方程；

（2）利用（1）中的回归方程，分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况，并预测该地区 2015 年农民居民家庭人均纯收入.

附：回归直线方程的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}，\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$$

解：（1）设线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$，则　　……先假设出回归方程

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$$

……写计算 b，a 的公式，不管题目有没有给出公式

$\bar{t}=\frac{1}{7}\times(1+2+3+4+5+6+7)=3.86$

$\bar{y}=\frac{1}{7}\times(2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9)=4.30$

$\sum_{i=1}^{n}t_iy_i=1\times2.9+2\times3.3+3\times3.6+4\times4.4+5\times4.8+6\times5.2+7\times5.9=134.4$

$\sum_{i=1}^{n}t_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$

$\Rightarrow\hat{b}=\frac{134.4-7\times3.86\times4.30}{140-7\times3.86^2}=\frac{18.2140}{35.7028}=0.51$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=4.30-0.51\times3.86=2.33$

故线性回归方程为：$\hat{y}=0.51\hat{t}+2.33$.

由回归方程知：该地区农村居民人均纯收入是逐年提高的.

2015 年的年份代号为 9，所以当 t=9 时，$y=0.51\times9+2.33=6.92$（千元）

故预计该地区 2015 年农民居民家庭人均纯收入为 6.92 千元.

题型五：圆锥曲线

1、椭圆（以焦点在 x 轴上的为例）

①定义：$PF_1+PF_2=2a$

②标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

③离心率：$e=\frac{c}{a}$

④固定关系：$a^2=b^2+c^2$

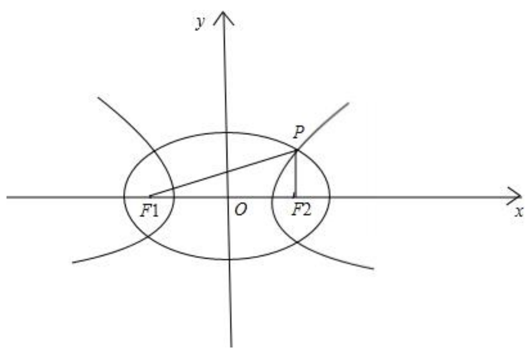
⑤焦距：$|F_1F_2|=2c$

⑥准线：$x=\pm\frac{a^2}{c}$

⑦通径：$|AB|=\frac{2b^2}{a}$

⑧长轴长：$|A_1A_2|=2a$

⑨短轴长：$|B_1B_2|=2b$



例 20：(2018 北京卷文)已知椭圆 M:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为$2\sqrt{2}$，斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有不同的交点 A，B.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 k=1，求|AB|的最大值；

（3）设 P(−2,0)，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D，若 C，D 和 Q$(-\frac{7}{4},\frac{1}{4})$共线，求 k.

解：（1）已知椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ……首先假设椭圆的方程

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{2}$ ……先写公式再带数值

$\Rightarrow c=\sqrt{2},a=\sqrt{3}$

$\because a^2=b^2+c^2\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=1$ ……先写公式再带数值

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（2）由题意，设 AB 所在的直线方程为 $y=kx+b$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 ……一定要假设出直线方程

$\begin{cases}y=x+b\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow4x^2+6bx+3b^2-3=0$ ……将直线与椭圆联立方程

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3b}{2},x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{3b^2-3}{4}$ ……韦达定理

$\Delta=b^2-4ac=(6b)^2-4\cdot4(3b^2-3)=-12b^2+48>0\Rightarrow0\le b^2<4$ ……保证直线与椭圆有两个交点

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\frac{3b}{2})^2-4\cdot\frac{3b^2-3}{4}}=\sqrt{-\frac{3}{2}b^2+6}$ ……弦长公式

因此当且仅当 $b^2=0$ 即 $b=0$ 时，$|AB|$的值最大，且$|AB|_{\max}=\sqrt{6}$.

（3）设 $C(x_3,y_3)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-0}{x_1-(-2)}=\frac{y_1}{x_1+2}$ ……未知点要先假设出坐标

$\therefore$ PA 所在的直线方程为：$y-0=k(x+2)\Rightarrow y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ ……代入直线的点斜式方程

$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow3(x+2)^2y_1^2+(x_1+2)^2(x^2-3)=0$ ……将直线与椭圆联立方程

又$\because$点 A 在椭圆上，因此有$\frac{x_1^2}{3}+y_1^2=1$

$\Rightarrow(4x_1+7)x^2+4((3-x_1)^2x-(7x_1^2+12x_1)=0$

$x_1x_3=-\frac{7x_1^2+12x_1}{4x_1+7}\Rightarrow x_3=-\frac{7x_1+12}{4x_1+7}$ ……韦达定理和点斜式方程

$\Rightarrow y_3=\frac{y_1}{x_1+2}(x_3+2)=\frac{y_1}{4x_1+7}$

$\therefore C(-\dfrac{7x_1+12}{4x_1+7},\dfrac{y_1}{4x_1+7})$

同理可得，$D(-\dfrac{7x_2+12}{4x_2+7},\dfrac{y_2}{4x_2+7})$

又$\because Q$、C、D在同一直线上，因此

$$k_{CQ}=k_{DQ}\Rightarrow\frac{\dfrac{y_1}{4x_1+7}-\dfrac{1}{4}}{-\dfrac{7x_1+12}{4x_1+7}+\dfrac{7}{4}}=\frac{\dfrac{y_2}{4x_2+7}-\dfrac{1}{4}}{-\dfrac{7x_2+12}{4x_2+7}+\dfrac{7}{4}}\Rightarrow 4y_1-4x_1-7=4y_2-4x_2-7\Rightarrow y_1-y_2=x_1-x_2$$

即 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$.

2、双曲线（以焦点在 x 轴上的为例）

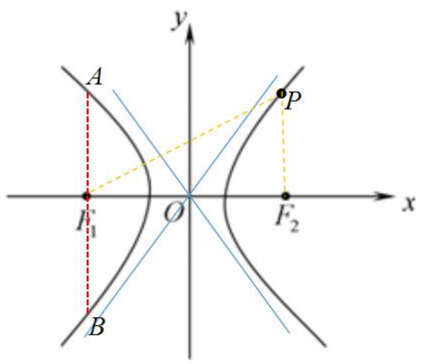
①定义：$|PF_1-PF_2|=2a$　　⑥渐进线：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

②标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　⑦通径：$|AB|=\dfrac{2b^2}{a}$

③离心率：$e=\dfrac{c}{a}$　　⑧实轴长：$|A_1A_2|=2a$

④固定关系：$c^2=a^2+b^2$　　⑨虚轴长：$|B_1B_2|=2b$

⑤焦距：$|F_1F_2|=2c$



例 21：已知 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点 $F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$，点 $A(3,\sqrt{7})$ 在双曲线上.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）记 O 为坐标原点，过点 Q(0,2)的直线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 E，F，若 ΔEOF 的面积为 $2\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

解：（1）已知双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则　　……先写出标准方程的原始式子

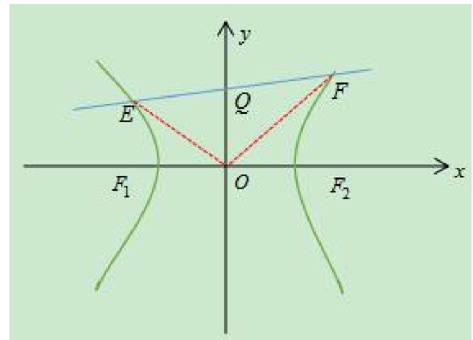
由题意得，c=2，点 $A(3,\sqrt{7})$ 在双曲线上 $\Rightarrow\dfrac{3^2}{a^2}-\dfrac{(\sqrt{7})^2}{b^2}=1$

$\because c^2=a^2+b^2\Rightarrow 4=a^2+b^2$　　……先写出 a,b,c 三者的固定关系再带数值

解得 $a^2=2,b^2=2$

故双曲线的标准方程为：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线 l 的方程为 $y-0=k(x-2)$，即 $y=kx+2$，则 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$



$$\begin{cases}y=kx+2\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(1-k^2)x^2-4kx-6=0$$

$\Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{4k}{1-k^2}$，　$x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-6}{1-k^2}$

$\Delta=b^2-4ac=(-4k)^2-4\cdot(1-k^2)\cdot(-6)=16k^2+24(1-k^2)>0$

$\Rightarrow k^2<3$且$k^2\neq1\Rightarrow k\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$

点 O 到直线 EF 的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|0+0+2|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$　　……先写出公式再带数值

$|EF|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{4k}{1-k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{-6}{1-k^2}\right)}$　　……弦长公式，先写出公式再带数值

$=\dfrac{2\sqrt{2(1+k^2)(3-k^2)}}{1-k^2}$

由题意，得

$S_{\Delta EOF}=\dfrac{1}{2}\cdot|EF|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2(1+k^2)(3-k^2)}}{1-k^2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}$　　……点 O 到直线 EF 的距离就是三角形的高

$\Rightarrow\sqrt{3-k^2}=1-k^2\Rightarrow 3-k^2=1-2k^2+k^4$

即 $k^4-k^2-2=0\Rightarrow(k^2-2)(k^2+1)=0$　　……将四次方看成平方的平方，再用十字相乘法

解得 $k=\pm\sqrt{2}$

$k=\pm\sqrt{2}\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$　　……得到的 k 值还要验证是否能保证直线与双曲线有两个交点

故直线 l 的方程为：$y=\sqrt{2}x+2$ 或 $y=-\sqrt{2}x+2$.

注：十字相乘法解方程

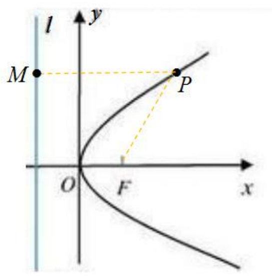
$k^4-k^2-2=0$

$k^2\quad -2$

$k^2\quad 1$

$\Rightarrow(k^2-2)(k^2+1)=0$

3、抛物线（以开口向右的为例）



①标准方程：$y^2=2px$

②焦点坐标：$F(\frac{p}{2},0)$

③准线方程：$x=-\frac{p}{2}$

④定义：平面内到一个定点与到定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，其中定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线.（常考，很重要的哦^o^）

⑤通径：过焦点 F 且垂直于 x 轴的直线与抛物线相交于 A，B 两点，则 $|AB|=2p$.

⑥过焦点的弦长：$|CD|=x_1+x_2+p$　　x_1，x_2 分别为 C，D 两点的横坐标

例 22：(2017 年全国Ⅱ卷文)设 A，B 为曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4.

（1）求直线 AB 的斜率；

（2）设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 AM⊥BM，求直线 AB 的方程.

解：（1）设 AB 所在直线方程为 $y=kx+b$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}y=kx+b\\ y=\frac{x^2}{4}\end{cases}\Rightarrow x^2-4kx-4b=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4k，\quad x_1x_2=\frac{c}{a}=-4b \qquad ①$$

又∵ $x_1+x_2=4\Rightarrow 4k=4\Rightarrow k=1$.

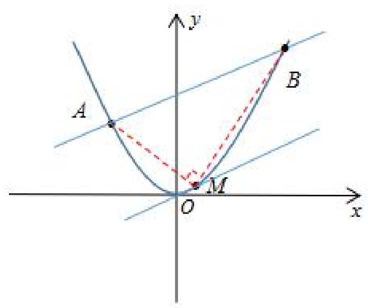
（2）设过点 M 与曲线相切且平行于直线 AB 的直线方程为 $y=x+m$，则

$$\begin{cases}y=x+m\\ y=\frac{x^2}{4}\end{cases}\Rightarrow x^2-4x-4m=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-4m)=0\Rightarrow m=-1$$

即该直线方程为 $y=x-1$.且 M(2,1)

由①式得，$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-4b$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-4b)>0\Rightarrow b>-1 \qquad ②$$



又∵ $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 都在直线 $y=x+b$ 上

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=(x_1+b)+(x_2+b)=4+2b\\ y_1y_2=(x_1+b)(x_2+b)=b^2\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AM}=(2-x_1,1-y_1),\overrightarrow{BM}=(2-x_2,1-y_2)$$

$$AM\perp BM\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Rightarrow(2-x_1)(2-x_2)+(1-y_1)(1-y_2)=0$$

$$\Rightarrow[4-2(x_1+x_2)+x_1x_2]+[1-(y_1+y_2)+y_1y_2]=0\Rightarrow b^2-6b-7=0\Rightarrow(b-7)(b+1)=0$$

解得 $b=7$ 或 $b=-1$

由②式知：$b=-1$（舍去）⇒ $b=7$　　因此所求直线方程为 $y=x+7$.

☞**答题步骤：**

①设方程：假设出曲线的标准方程；（不管题目有没有，都要假设哦^o^）

②抄条件：写出题目所给的条件，该带公式就带公式，如已知离心率为 $\frac{1}{2}$，在试卷上要写出 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；

③画图形：根据题意，画出图形；

④写过程：写出必要的解方程过程；

⑤得结论：写出结论（写出曲线方程，不会就猜一个）

⑥猜公式：第二问一定要写，要写什么参考以下第 4 点。嘻嘻^o^

4、圆锥曲线大题第二问常考公式：

①直线方程：$y-y_0=k(x-x_0)$ 或 $y=kx+b$　　……题目说直线过某个定点时用第一个，只说直线时用第二个

方法：把直线假设出来后一般都要和曲线联立方程：

$$\begin{cases}y=kx+b\\ F(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow ax^2+bx+c=0$$　　……大部分题目都要将直线与曲线联立方程，而且要写出根与系数的关系

注：为保证方程有两个实根，必须满足 $\Delta=b^2-4ac>0$　　……这是很多同学容易漏写的一点，很重要

②韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$（根与系数的关系式）　　……联立方程后一般都要写出根与系数的关系

③弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$　　……一般在计算三角形的面积或两点之间的距离时要用到

④圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　　圆心：(a,b)　半径：r

⑤点到直线的距离公式：已知点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l:Ax+By+C=0$，则 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　　……计算三角形的高

⑥斜率公式：$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

⑦看到直线与曲线相交于两点 A，B 时，要假设两点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

⑧中点坐标公式：$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点的中点记为 $M(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

例 23：（2014 全国 I 卷文）（本小题满分 12 分）已知点 A(0，−2)，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当 ΔOPQ 的面积最大时，求 l 的方程.

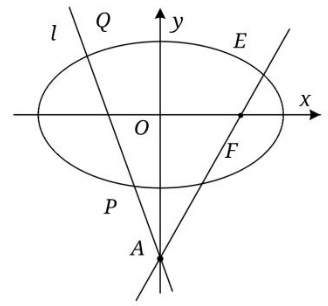
解：（1）已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则

由题意，设 $F(c,0)$，则 $k_{AF}=\frac{0-(-2)}{c-0}=\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow c=\sqrt{3}$　　①

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=2$　　②

又 $\because a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$　　③

因此，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



（2）设直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y-(-2)=k(x-0)\Rightarrow y=kx-2$

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}y=kx-2\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(1+4k^2)x^2-16kx+12=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{16k}{1+4k^2}，\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{12}{1+4k^2}$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-16k)^2-4(1+4k^2)\cdot 12=16(4k^2-3)>0\Rightarrow k^2>\frac{3}{4}\Rightarrow k\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$$

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{16k}{1+4k^2}\right)^2-4\left(\frac{12}{1+4k^2}\right)}=\frac{4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$$

点 O 到直线 PQ 的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$

故 ΔOPQ 的面积为 $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot d=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

令 $t=\sqrt{4k^2-3}$，则 $k^2=\frac{t^2+3}{4}\Rightarrow S_{\Delta OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\le\frac{4}{2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}}=1$

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$ 即 $t=2$ 时等号成立，此时 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$　　　故直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

例 24：(2017 天津卷理)设椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，离心率为 $\frac{1}{2}$.已知 A 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆的方程和抛物线的方程；

（2）设 l 上两点 P，Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B（B 异于点 A），直线 BQ 与 x 轴相交于点 D.若 ΔAPD 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AP 的方程.

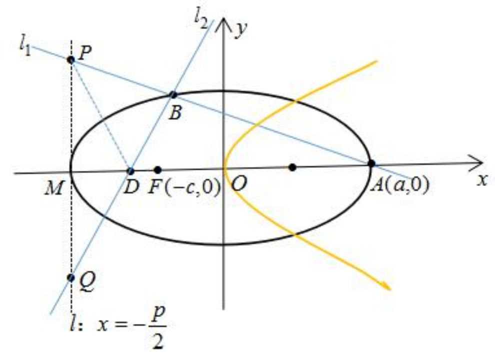
解：（1）已知椭圆和抛物线的方程分别为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$．则

设 $F(-c,0)$，$A(a,0)$，则

由题意知：$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\frac{p}{2}=a$，$a-c=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$，$c=\frac{1}{2}$，$p=2$

$\because a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=1^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

因此椭圆的方程为 $x^2+\frac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为 $y^2=4x$.



（2）设 AP 所在直线方程为 $y=k(x-1)$，则 $P(-1,-2k)$，$Q(-1,2k)$

$$\begin{cases}y=k(x-1)\\ x^2+\frac{4y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-3=0\Rightarrow[(3+4k^2)x+(3-4k^2)](x-1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=0\\ y_2=\frac{-6k}{4k^2+3}\end{cases}\Rightarrow B(\frac{4k^2-3}{4k^2+3},\frac{-6k}{4k^2+3})$$

设 BQ 所在直线方程为 $\frac{y-y_Q}{y_B-y_Q}=\frac{x-x_Q}{xB-x_Q}$，则

$$\frac{y-2k}{\frac{-6k}{4k^2+3}-2k}=\frac{x-(-1)}{\frac{4k^2-3}{4k^2+3}-(-1)}\Rightarrow(y-2k)\left(\frac{4k^2-3}{4k^2+3}+1\right)=(x+1)\left(\frac{-6k}{4k^2+3}-2k\right)$$

当 $y=0$ 时，$x=\frac{2k^2-3}{2k^2+3}$，即 $D(\frac{2k^2-3}{2k^2+3},0)$

$|AD|=1-\frac{2k^2-3}{2k^2+3}=\frac{6}{2k^2+3}$

$S\Delta APD=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|PM|=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2k^2+3}\cdot(-2k)=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow 2k^2+2\sqrt{6}k+3=0\Rightarrow(\sqrt{2}k+\sqrt{3})^2=0\Rightarrow k=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

因此，直线 AP 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)$.

题型六：导数

1、常考求导公式：

①$(C)'=0$　C 为常数　②$(x^n)'=nx^{n-1}$　例如：$(x^3)'=3x^2$　$(x^2)'=2x$　$x'=1$　$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

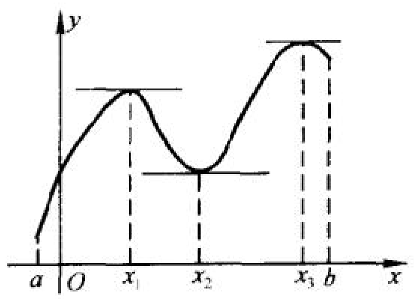
③$(\ln x)'=\frac{1}{x}$　④$(mn)'=m'n+mn'$　⑤$\left(\frac{m}{n}\right)'=\frac{m'n-mn'}{n^2}$

2、曲线的切线方程：$y-y_0=k(x-x_0)$

3、导数的意义：曲线在 $x=x_0$ 处的切线的斜率，即 $k=f'(x_0)$

4、性质：函数在极值点处的导数为零，即如果 $x=x_0$ 为函数的极值点（不管是极大值还是极小值），必有 $f'(x_0)=0$

5、如图所示：



①x_1，x_3 为极大值点，x_2 为极小值点；

②$f(x_1)$，$f(x_3)$ 为极大值，$f(x_2)$ 为极小值；

③$f'(x_1)=0$，$f'(x_2)=0$，$f'(x_3)=0$.

注意：①极大值不一定是最大值，极小值不一定是最小值；

②如果奇函数在原点处有定义，必有 $f(0)=0$.

6、利用导数求极值的方法：解方程 $f'(x)=0$

①如果在 x_0 附近的左侧有 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 为极大值；

②如果在 x_0 附近的左侧有 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 为极小值.

7、利用导数求切线方程的方法：

①假设函数在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=k(x-x_0)$；

②求 $f'(x)$；

③$k=f'(x_0)$；

④得出切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

☞**答题步骤：**

①定义域：写出函数的定义域：一般看到 $\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其他都是 R

②求导数：求导：$f'(x)$

③令导零：令 $f'(x)=0$，得出方程的根　……一般要分类讨论

④判单调：$f'(x)>0\Rightarrow$ 函数单调递增

$f'(x)<0\Rightarrow$ 函数单调递减

⑤得结论：写出函数的单调区间

⑥画图形：画出函数图像，判断极值点

例 25：(2017 北京卷文)已知函数 $f(x)=e^x\cos x-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

解：（1）已知 $f(x)=e^x\cos x-x$，定义域为 R　……将题中的原函数抄上来后，写出函数的定义域

$f'(x)=(e^x)'\cdot\cos x+e^x\cdot(\cos x)'-1=e^x\cos x-e^x\sin x-1$　……求导，这是必做的一步

$f'(0)=e^0\cos 0-e^0\sin 0-1=0$

$\Rightarrow k=f'(0)=0$　……利用导数的几何意义，即 $k=f'(x_0)$

又∵ $f(0)=e^0\cos 0-0=1$

因此切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1$.　……先写出直线方程的原始表达式，再带值

（2）由（1）知：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-1$

$\Rightarrow f''(x)=\left[(e^x)'\cdot\cos x+e^x\cdot(\cos x)'\right]-\left[(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'\right]$　……求二阶导数 $f''(x)$

$=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x$

$=-2e^x\sin x$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$f''(x)\le 0\Rightarrow f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减　……用二阶导数的正负判断一阶导数的单调性

$\therefore f'(x)_{\max}=f'(0)=0$

$\Rightarrow f'(x)\le f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减

因此 $f(x)_{\max}=f(0)=1$，$f(x)_{\min}=f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$.

例 26：(2017 年全国Ⅰ卷理)已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：已知 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，$x\in R$

$$f'(x)=ae^{2x}\cdot 2+(a-2)e^{x}-1=(ae^{x}-1)(2e^{x}+1)$$

(i)当 $a\le 0$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(x)$ 在 R 上单调递减；

(ii)当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Rightarrow x>-\ln a$

$f'(x)<0\Rightarrow x<-\ln a$

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

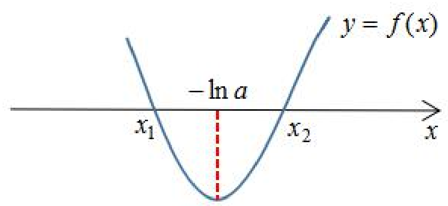
（2）$\because f(x)$ 有两个零点 $\Rightarrow$ 必有 $a>0$

由（1）知：必有 $f(-\ln a)<0$

$\Rightarrow a\cdot e^{-2\ln a}+(a-2)e^{-\ln a}-(-\ln a)<0$

$\Rightarrow a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)+(a-2)\cdot\frac{1}{a}+\ln a<0$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$



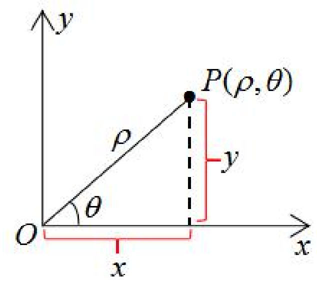
(i)当 $a=1$ 时，$f(-\ln a)=0\Rightarrow f(x)$ 只有一个零点，不符题意；

(ii)当 $a>1$ 时，$1-\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}>0\Rightarrow f(-\ln a)>0\Rightarrow f(x)$ 没有零点，不符题意；

(iii)当 $0<a<1$ 时，$1-\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}<0\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow f(x)$ 有两个零点.

综上所述，得 $a\in(0,1)$.

题型七：极坐标与参数方程



1、坐标与直角坐标的互相转化：

①极坐标化为直角坐标：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$　　②直角坐标化为极坐标：$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases}$

注：若点 P 的直角坐标为$(x，y)$，则极坐标为$(\rho，\theta)$

2、参数方程

（1）椭圆的参数方程：①普通方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　②参数方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$　其中 θ 为参数

（2）圆的参数方程：①普通方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　　②参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$　其中 θ 为参数

（3）过定点 $P(x_0,y_0)$，倾角为 α 的直线的参数方程为：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$　其中 t 为参数

（4）抛物线的参数方程：（少考，可以不记哦^o^）

①普通方程：$y^2=2px$　　②参数方程：$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$　其中 t 为参数

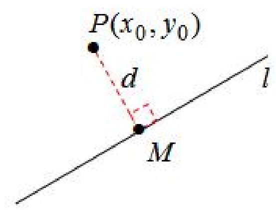
3、由参数方程转化为普通方程的方法：

（1）直线方程消参：①代入法　②消元法　　^o^目的都是为了消去参数 t

（2）椭圆和圆消参：①公式法　②利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　^o^目的都是为了消去参数 α

4、极坐标与参数方程大题常考公式

①平方关系：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　……如果记不住曲线的参数方程，用该公式进行消参



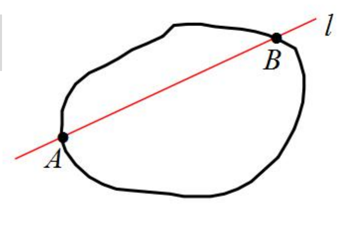
②点到直线的距离公式：已知点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l: Ax+By+C=0$，则 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

③辅助角公式：$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$　其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$　……用来求点到直线的距离或面积的最大值

④弦长公式：（i）已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

（ii）已知 A，B 两点对应的极径分别为 ρ_1，ρ_2，则 $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}$

（iii）已知 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$



⑤韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$

☞答题步骤：

①先消参：不论题目给的曲线是极坐标方程还是参数方程，都先化为普通方程（直角坐标方程）；

②写公式：需要用到哪些公式的一定要先写出公式的原始表达式；

③有过程：要有一定的解题过程，适当的文字描述，过程不能太少；

④得结果：写出消参并化简后的曲线方程；

④猜公式：第二问常考公式参考以上第 4 点。

例 27：选修 4-4：极坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}$．

（1）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）设 P 为曲线 C_1 上的动点，求点 P 到 C_2 上点的距离的最小值．

解：（1）已知曲线 C_1：$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ \sin\alpha=y \end{cases}$　　……先写出题目所给的原始方程，再消参

由 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，得　　……记不住参数方程的情况下可用 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 消参

$\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+y^2=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3}+y^2=1$．　　……式子消去 α 再化简后才算消参完成

已知曲线 C_2：$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2} \Rightarrow \rho(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)=4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}x=4\sqrt{2} \Rightarrow y+x=8$．

（2）设 $P(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha)$，则　　……解题的技巧在于假设 P 点的坐标

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-8\right|}{\sqrt{2}}$$

……先写出点到直线的距离公式，再带值

当且仅当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=1$ 时，d 有最小值，且最小值为 $3\sqrt{2}$．　　……最后一步用了辅助角公式

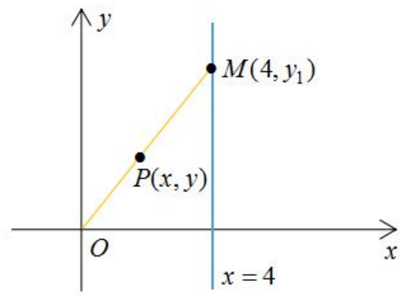
例 28：选修 4-4：极坐标系与参数方程

(2017 全国Ⅰ卷文)在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$．

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$，点 B 在曲线 C_2 上，求 ΔOAB 面积的最大值．

解：（1）已知曲线 C_1：$\rho\cos\theta=4 \Rightarrow x=4$．



设 $P(x,y)$，$M(4,y_1)$，则

$\because$ 点 P 在线段 OM 上，且 $|OM|\cdot|OP|=16$

$\Rightarrow 0<x\le 4$，$k_{OP}=k_{OM} \Rightarrow \dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{y_1-0}{4-0} \Rightarrow y_1=\dfrac{4y}{x}$

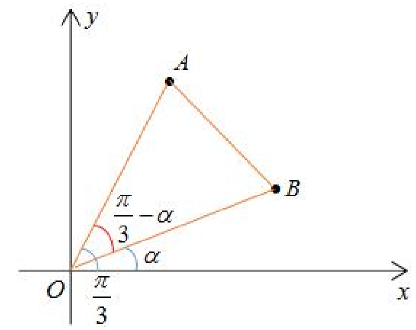
$|OM|\cdot|OP|=\sqrt{4^2+\left(\dfrac{4y}{x}\right)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=16 \Rightarrow x^4+2x^2y^2+y^4=16x^2 \Rightarrow (x^2+y^2)^2=16x^2$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$．

（2）由（1）知，曲线 C₂: $(x-2)^2+y^2=4$ $(x^2-4x+4)+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=4x \Rightarrow \rho^2=4\rho\cos\alpha \Rightarrow \rho=4\cos\alpha$

即 C₂ 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\alpha$　$\therefore |OB|=4\cos\alpha$

又 $\because |OA|=2$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$



$\Rightarrow S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$

$=4\cos\alpha\cdot(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha)$

$=4\cos\alpha\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)$

$=2\sqrt{3}\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos2\alpha}{2}-\sin2\alpha=-\sin2\alpha+\sqrt{3}\cos2\alpha+\sqrt{3}$

$=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\sin(2\alpha+\varphi)+\sqrt{3}=2\sin(2\alpha+\varphi)+\sqrt{3}$.

当 $\sin(2\alpha+\varphi)=1$ 时，ΔAOB 面积最大，且最大值为 $2+\sqrt{3}$．

例 29：(2017 全国Ⅱ卷文)选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）若 a=-1，求 C 与 l 的交点坐标；

（2）若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$，求 a.

解：（1）已知曲线 C：$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{3} \\ \sin\theta=y \end{cases}$　　……题目的曲线方程一定要先抄写一遍

$\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{3}\right)^2+y^2=1$.　　……记不住公式时，就用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 消参

当 a=-1 时，直线 l: $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+4t \\ t=1-y \end{cases} \Rightarrow x=-1+4(1-y) \Rightarrow x+4y-3=0$.

联立方程 $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{3}\right)^2+y^2=1 \\ x+4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{3-x}{4}\right)^2=1 \Rightarrow 25x^2-54x-63=0$

$\Rightarrow (25x+21)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ y_1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-\dfrac{21}{25} \\ y_2=\dfrac{24}{25} \end{cases}$

即曲线 C 与直线 l 的交点坐标为 $(3,0)$ 和 $(-\dfrac{21}{25},\dfrac{24}{25})$.

（2）设曲线 C 上的动点为 $P(3\cos\theta,\sin\theta)$，则　　……利用参数假设动点 P 的坐标

$\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases} \Rightarrow x+4y-4-a=0$

动点 P 到直线 l 的距离为

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|3\cos\theta+4\sin\theta-4-a|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\dfrac{|5\sin(\theta+\alpha)-4-a|}{\sqrt{17}}$　　……先写出点到直线的距离公式，再带值

①当 $a\ge -4$ 时，$d_{\max}=\dfrac{|-9-a|}{\sqrt{17}}=\dfrac{9+a}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Rightarrow a=8$；　　……负数的绝对值是它的相反数

②当 $a<-4$ 时，$d_{\max}=\dfrac{|1-a|}{\sqrt{17}}=\dfrac{1-a}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Rightarrow a=-16$.　　……正数的绝对值是它本身

例 30：(2017 全国Ⅲ卷理)选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=kt \end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+m \\ y=\dfrac{m}{k} \end{cases}$（$m$ 为参数）.设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C.

（1）写出 C 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 l_3：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，$M$ 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径.

解：（1）已知直线 l_1 为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=kt \end{cases} \Rightarrow y=k(x-2)$.　　……先写出题目所给的直线方程，再消参

直线 l_2 为 $\begin{cases} x=-2+m \\ y=\dfrac{m}{k} \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{x+2}{k}$.　　……先写出题目所给的直线方程，再消参

设 $P(x,y)$，则

$\begin{cases} y=k(x-2) \\ y=\dfrac{x+2}{k} \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=4$.　　……将两直线联立方程得到点 P 的轨迹方程 C

因此，C 的普通方程为 $x^2-y^2=4$.

（2）设点 M 的极坐标为 (ρ,θ)，则

由（1）知 C：$x^2-y^2=4 \Rightarrow (\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2=4$　①

又 $\because l_3$：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{2}$

联立方程，得

$\begin{cases} (\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2=4 \\ \rho(\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4 \\ \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=4 & ② \\ \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^2=2 & ③ \end{cases}$

两式相除，得

$\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=2 \Rightarrow \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2 \Rightarrow \tan\theta=-\dfrac{1}{3}$　④　　……先是分子分母同时除以 $\cos\theta$，利用 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\dfrac{1}{10},\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$ 代入④式，得

$\rho^2=5 \Rightarrow \rho=\sqrt{5}$　　即点 M 的极径为 $\rho=\sqrt{5}$.